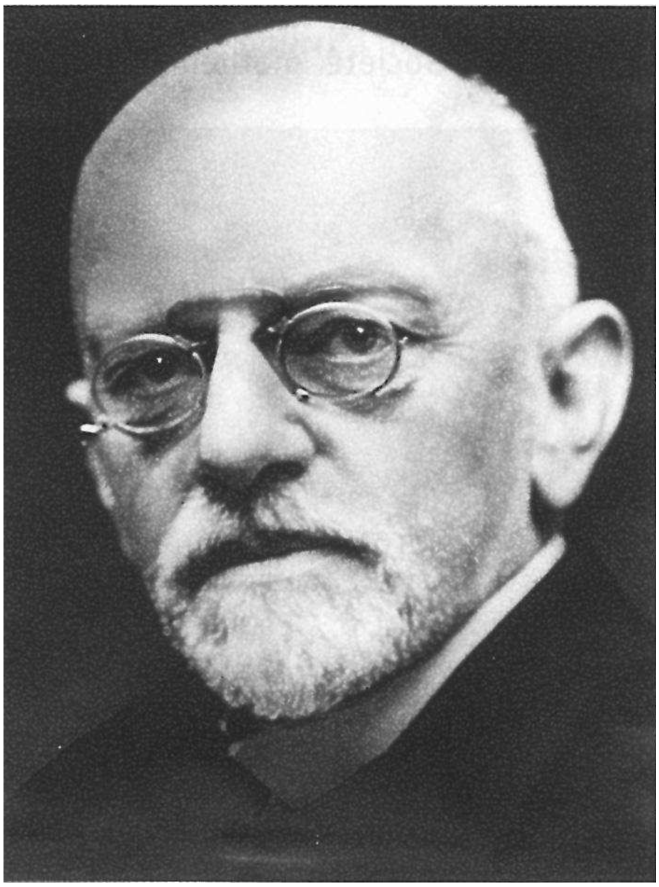
Il filosofo e il matematico

Pierre Cassou-Noguès

Per tutto il corso della loro storia, la filosofia e la matematica hanno mantenuto una relazione tanto stretta quanto misteriosa. Dovrebbe risalire a Platone nel mondo greco e a Cartesio all'albori dell'età moderna. Evochiamo qui due grandi figure del ventesimo secolo, David Hilbert e Edmund Husserl.

Edmund Husserl e David Hilbert si incontrano a Göttingen nel 1901. Il filosofo, Husserl, ha seguito studi di matematica. A Berlino è stato assistente di Karl Weierstrass, grande matematico analista, prima di incontrare Franz Brentano a Vienna, e di rivolgere la sua attenzione alla filosofia. Ha pubblicato nel 1891 la "Filosofia dell'aritmetica". Il primo tomo delle sue "Ricerche logiche" esce nello stesso periodo in cui il filosofo si stabilisce a Göttingen. Il matematico, Hilbert, è a Göttingen dal 1897. Ha risolto un problema famoso nell'ambito della teoria degli invarianti, il "problema di Gordan", che da una ventina d'anni impensieriva i geometri tedeschi. Ha sviluppato, in algebra, la "teoria dei corpi algebrici". Husserl e Hilbert hanno pressappoco la stessa età. Si incrociano alla facoltà di filosofia che raduna, in realtà, filosofi e matematici. Sia l'uno che l'altro stanno per trasformare la propria disciplina. Husserl scopre la fenomenologia. Hilbert fonda il metodo



David Hilbert (1862-1943) è stato, con il francese Henri Poincaré, uno dei grandi matematici del 1900. Per la profondità dei suoi lavori e del suo punto di vista, per il dinamismo che ha saputo creare a Göttingen, ha esercitato una influenza notevole sui matematici del XX secolo. (Negativo ARG) astratto che caratterizza la matematica moderna.

Göttingen, luogo d'eccellenza matematica, accoglie i filosofi.

Se Göttingen non era che una cittadina vicino a Stollgan, essa diviene, poco dopo il 1900, il centro del mondo matematico. Felix Klein è a capo della facoltà. Questo grande geometra, che ha stabilito in modo definitivo l'esistenza di spazi non euclidei, rinuncia alla ricerca e si consacra ai suoi corsi sullo sviluppo della matematica fino al diciannovesimo secolo, e all'amministrazione della facoltà, per la quale trova nuovi fondi. Egli chiama a Göttingen Hilbert e successivamente Hermann Minkowski. Quest'ultimo introdurrà, durante una celebre lezione, il "continuum di spazio e tempo" che porta il suo nome e che sarà utilizzato da Einstein per formulare la teoria della relatività. Ogni settimana, la Società matematica di Göttingen si riunisce attorno ad un conferenziere, di Göttingen o di fuori. Husserl, il filosofo, parla nell'aprile del 1901 del problema degli immaginari in aritmetica. Göttingen è un luogo consacrato alla matematica. Si racconta che un giorno Min-

Uno degli edifici per la matematica a Göttingen, l'Istituto di matematica applicata e numerica, come è oggi. Dal 1900 al 1930 Göttingen è stato per i matematici un centro rinomato in tutto il mondo, grazie agli sforzi di David Hilbert. Qui i matematici affiancavano il loro studio a quello dell filosofia e delle altre scienze. (Negativo Università di Göttingen) kowski, mentre passeggiava per la via principale, vide un giovane pensieroso, in preda a qualche tormento; egli lo toccò gentilmente su una spalla e gli disse: "Non si tormenti, converge", e allora il giovane si allontanò, rassicurato.

È a Göttingen che Hilbert sviluppa il metodo astratto della matematica moderna. Il metodo astratto è nato nell'algebra del diciannovesimo secolo. Richard Dedekind e Leopold Kronecker, in particolare, hanno introdotto quelle che vengono chiamate strutture. Si definisce una struttura matematica, ad esempio quella di "gruppo", di "spazio vettoriale", di "corpo", determinando le leggi che le operazioni verificano, senza considerare la natura degli oggetti su cui queste operazioni agiscono. In questo modo, una stessa struttura si può applicare a oggetti di natura diversa, a numeri, a funzioni, a trasformazioni geometriche, etc. L'astrazione, in matematica, consiste nell'allontanarsi, ovvero nel fare astrazione, dalla natura degli oggetti, per considerare solo le relazioni che sussistono tra gli oggetti stessi. Questo punto di vista, che emerge nell'algebra di Dedekind e che è restato anonimo fino al diciannovesimo secolo, è stato formalizzato da Hilbert.

Hilbert dà una formulazione assiomatica della geometria.

Dal suo arrivo a Göttingen, Hilbert annuncia un corso di geometria. Questo corso, che sarà pubblicato con il titolo *I fondamenti della geometria*, si appoggia al metodo astratto per dare una formulazione assiomatica della geometria. Hilbert si allontana dalla natura degli oggetti geometrici, il punto, la retta, il piano, e si accontenta di porre tra loro delle relazioni, le cui le proprietà sono rese esplicite attraverso gli assiomi. Detto in altro modo, gli assiomi fissano le proprietà delle relazioni esistenti tra oggetti la cui natura resta indeterminata. Quindi, gli assiomi definiscono una struttura, in modo analogo a quanto fatto per le strutture algebriche. Ma, nel passaggio dall'algebra alla geometria, il primato della struttura è rafforzato. In algebra, si dà una strutura supponendo noti gli oggetti, numeri, funzioni. Si può dimostrare un teorema a partire dalla struttura o ragionando sugli oggetti con la loro propria natura. In compenso, per assiomatizzazione, il ragionamento è ridotto a una semplice deduzione a partire dagli assiomi e gli oggetti sono definiti solamente in rapporto agli assiomi. Gli assiomi, e cioè la struttura, sono sufficienti per definire gli oggetti e per fare dimostrazioni su questi stessi oggetti.

Attraverso la sua assiomatizzazione della geometria e i suoi lavori successivi, Hilbert rende esplicito il metodo astratto dell'algebra, lo rende radicale e l'utilizza per produrre nuovi risultati. In realtà, Hilbert rivisita e trasforma in chiave astratta tutta la matematica del suo tempo: la geometria, l'algebra e la teoria dei numeri, con una prima dimostrazione della "congettura di Waring" nel 1909; l'analisi, dove introduce gli spazi di Hilbert, spazi astratti in cui, ad esempio, le funzioni sono i "punti". Il metodo astratto sarà ripreso, a Göttingen, dalla scuola di Emmy Noether e di Emil Artin, e poi, in Francia, dal gruppo Bourbaki. Nutrirà pertanto tutta la matematica.

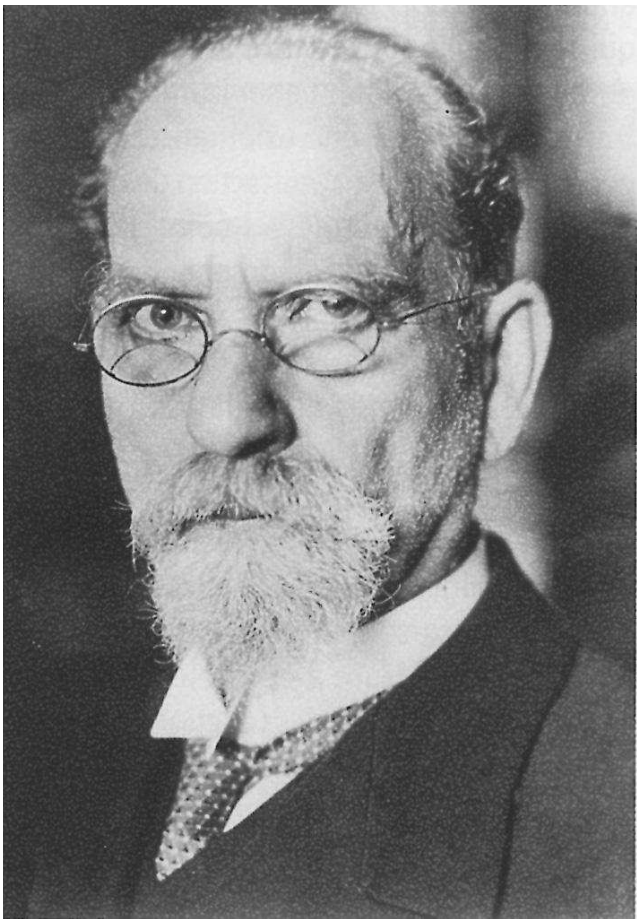
Dare un fondamento alla matematica.

Parallelamente, Hilbert sviluppa il metodo astratto per promuovere un programma di fondamenti della matematica. Dare fondamenti alla matematica significa dare ai suoi ragionamenti una garanzia estrema. Si tratta in particolare di giustificare i ragionamenti che presuppongono un infinito esistente in atto, i ragionamenti *trasfiniti*, tutto nel risparmio dell'ipotesi dell'esistenza dell'infinito. Il programma *formalista* comporta due tappe. Il primo compito è quello di formalizzare le teorie matematiche. Si considera un alfabeto di simboli. Si fissano le regole, analoghe all'ortografia e alla grammatica, per costruire una formula a partire da questi simboli. Si esplicitano gli assiomi, che serviranno da premesse alle dimostrazioni, e le leggi per dedurre una formula da un'altra. La matematica sarà rimpiazzata da un insieme di formule. Una dimostrazione consiste in una manipolazione dei simboli secondo regole esplicite, a prescindere dal significato dei simboli. Una dimostrazione si presenta come un assemblamento di simboli conforme a regole esplicite, uno schema costruito secondo leggi che abbiamo fissato. Il secondo compito è quello di dimostrare la non-contraddizione di questi sistemi formali per mezzo di ragionamenti al finito, cioè che non facciano intervenire l'infinito attuale.

La prima teoria a cui Hilbert tenta di applicare questo programma è l'aritmetica, che comporta già dei ragionamenti trasfiniti. Così, Hilbert apre una *teoria della dimostrazione*, che consiste in ragionamenti al finito che poggiano su schemi che rappresentano le dimostrazioni in un sistema formale. Tuttavia, nel 1931, il logico austriaco Karl Gödel stabilisce che è impossibile dimostrare, per mezzo di ragionamenti al finito, la non-contraddizione di un sistema formale che comprenda l'aritmetica elementare. Bisogna dunque rinunciare al programma iniziale di Hilbert.

Il metodo astratto e il programma formalista hanno affascinato i filosofi.

Rimane il fatto che Hilbert è riuscito a trasformare una questione filosofica, quella dei fondamenti, in un problema matematico, trattato per mezzo del metodo astratto e che si poggia su una nuova teoria, la teoria della dimostrazione, che è viva ancora oggi. Di rimando, il metodo astratto e il programma formalista che la teoria sottintende, hanno esercitato una sorta di fascino sui filosofi. Subito nelle *Ricerche logiche* del 1901, poi nella *Logica formale e logica trascendentale* del



Edmund Husserl (1859-1938), che si è in parte ispirato a problemi matematici per costruire la sua visione filosofica. (Negativo AKG)

1929, Husserl integra la rappresentazione astratta della matematica alla fenomenologia nascente. Husserl fa distinzione tra la matematica applicata, che comprende ad esempio la geometria in quanto teoria del nostro spazio, lo spazio in cui viviamo, e una matematica formale. A partire da una teoria applicata, un matematico ne estrae l'architettura e isola un sistema di assiomi che egli può poi far variare per ottenere nuove forme per possibili teorie. Così, la matematica formale appare come una teoria delle teorie o, nel vocabolario di Husserl, una *apofantica formale*, che mira a definire e classificare tutti i sistemi possibili di giudizi logici. Inoltre, come aveva mostrato Hilbert, procedere in modo assiomatico porta a fare astrazione dalla natura degli oggetti. Come conseguenza, ad ogni forma di teoria corrisponde un dominio di oggetti, oggetti qualunque, determinati soltanto dal fatto che soddisfano un tale sistema di assiomi. La teoria delle forme della teoria rappresenta dunque una *ontologia formale*, una teoria fatta per "qualche cosa", che mira a definire e a classificare, solamente per la loro forma, tutte le molteplicità possibili d'oggetti. La matematica formale comporta due orientamenti: è apofantica formale, quando i matematici volgono la loro attenzione verso i sistemi di giudizi logici; è ontologia formale, quando si concentrano sui domini d'oggetti. Se Hilbert, che aveva esaminato da vicino la geometria del diciannovesimo secolo, disponeva dei concetti di forme di teoria e di molteplicità formale prima del 1901, è certo che l'incontro con Hilbert e le discussioni alla Società matematica di Göttingen hanno giocato un ruolo decisivo nell'elaborazione di una fenomenologia sistematica.

Hilbert è riuscito a portare all'interno della matematica la questione dei fondamenti. Si tratta di un processo di interiorizzazione da parte della matematica di una questione filosofica. Husserl ha eseguito il processo di interiorizzazione, inverso, del metodo astratto della matematica nella filosofia. Il percorso dei due uomini, il filosofo Husserl e il matematico Hilbert, testimonia un'interiorizzazione, reciproca e concomitante, della matematica da parte della filosofia e della filosofia da parte della matematica.

Pierre Cassou-Noguès
CNRS, Laboratoire Savoirs et Textes,
Università Lille III

Alcuni riferimenti bibliografici

- P. Cassou-Noguès, *Hilbert*, (Les Belles Lettres, 2001)
- P. Cassou-Noguès, *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès*, (Vrin, 2001)
- J. T. Desanti, *La philosophie silencieuse* (Seuil, 1975)
- D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen* (Springer-Berlin, 1931-1935)
- E. Husserl, *Recherches logiques*, tr. fr. H.Elie, A.L.Kelkel et. R. Schérer, P.U.E., 1959)
- C. Reid, *Hilbert* (Springer 1970)
- H. Sinaceur, *Corps et modèles* (Vrin, 1991)