Compressione di immagini: l'uso delle *wavelets*

Stéphane Mallat

Che siano immagazzinate nelle memorie informatiche o che viaggino attraverso internet, le immagini occupano molto spazio. Fortunatamente è possibile "condensarle" senza alterare troppo la loro qualità!

Figura 1. Queste tre immagini illustrano la potenza del metodo della compressione virtuale. L'immagine originale (A) è formata da 512×512 *punti; ciascuno di essi ha un determinato livello di grigio, preso da una tavolozza con* 256 *livelli. L'immagine (B) è il risultato di una compressione per un fattore* 8*, realizzata riducendo il livello di grigio a soli* 2 *valori (bianco o nero). L'immagine (C) è stata ottenuta da (A) attraverso una compressione di fattore* 32 *utilizzando una base di wavelets. La differenza di qualità con l'immagine iniziale è appena percepibile (Figura dell'autore).*

Una immagine digitale si comprime così come è possibile ridurre tutto il succo di una arancia a qualche grammo di polvere liofilizzata. Non si tratta di un gioco di abilità ma di tecniche matematiche ed informatiche che permettono di ridurre lo spazio occupato da una immagine in un calcolatore o in un cavo di comunicazione. Esse oggi sono indispensabili per immagazzinare informazioni e per trasmetterle via internet, per telefono, per satellite o altro. La compressione di una immagine rappresenta quest'ultima per mezzo di un numero ridotto di parametri, eliminandone la ridondanza. Un esempio caricaturale ci aiuterà a comprendere meglio l'idea di principio: nel caso di una immagine completamente bianca è inutile precisare esplicitamente quale sia il livello di grigio corrispondente a ciascuno dei punti che la compongono; sarebbe più lungo che affermare semplicemente che:"tutti i punti della immagine sono bianchi". Il problema della rappresentazione è un tema centrale della matematica e le sue applicazioni vanno al di là della compressione dei dati. In questi ultimi dieci anni, si sono ottenuti progressi considerevoli grazie allo sviluppo della teoria delle *wavelets* (dette *ondine* in italiano). Nel campo del trattamento delle immagini, questi progressi hanno portato all'adozione di un nuovo standard di compressione detto JPEG-2000. Questa storia ha numerosi risvolti che illustrano bene il ruolo della matematica nel moderno panorama scientifico e tecnologico.

Trentadue volte meno spazio grazie alle wavelets

Consideriamo un'immagine come quella della figura 1A. Essa è costituita da 512×512 punti, i cui livelli di grigio possono variare da 0 (nero) a 255 (bianco). Ognuno dei 255 livelli di grigio possibile può essere rappresentato da un ottetto, vale a dire un numero binario costituito da 8 bits (praticamente è una successione di otto cifre che possono essere solo 0 o 1, come ad esempio 11010001). Sono quindi necessari $512 \times 512 \times 8 = 2097152$ bits, che sono tanti, per codificare una sola immagine di questo tipo. La prima idea che viene in mente è quella di ridurre il numero dei bits: diminuire il numero di livelli di grigio, per esempio, limitandosi al bianco o al nero, come accade in figura 1B. I due valori possibili di livello di grigio si codificano con un solo bit (che vale 0 o 1) ed il numero di bits necessari per memorizzare l'immagine è stato quindi diviso per otto. Chiaramente la qualità dell'immagine è molto peggiorata. Guardate ora l'immagine in figura 1C. Essa è codificata con un numero di bits minore di trentadue volte rispetto a quello necessario per memorizzare l'immagine originaria, mediante l'uso delle wavelets, tuttavia la degradazione della qualità è appena percettibile. Perchè? Perchè al posto di ridurre la precisione è stata modificata la modalità di rappresentazione dell'informazione.

In principio c'era l'analisi di Joseph Fourier...

Come si è detto, l'immagine digitale è definita da 512×512 numeri che specificano l'intensità luminosa di ciascun punto. Si può dunque interpretare questa immagine come un punto in uno spazio di 512×512 dimensioni, nello stesso modo in cui un punto su una superficie (spazio a due dimensioni) può essere individuato da due coordinate, e domandarsi quali siano gli assi coordinati più appropriati per rappresentare tale punto. Un sistema di assi (di natura più astratta dei famigliari assi della geometria elementare) definisce quella che si chiama una *base*.

Una prima anticipazione fondamentale è stata realizzata dal fisico-matematico Joseph Fourier nel 1802, in una sua memoria dell'Accademia delle Scienze sulla propagazione del calore, argomento a priori senza alcuna relazione con il nostro

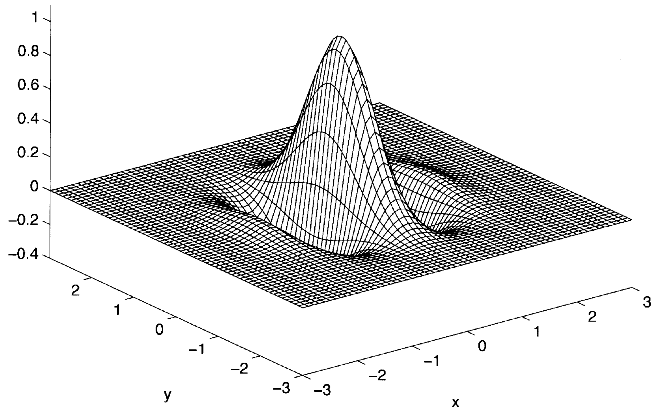

Figura 2. Il grafico di una wavelet utilizzata durante una compressione di immagini.

problema. In particolare, Fourier ha mostrato che, per rappresentare in modo compatto e semplice una funzione $f(x)$ (dal punto di vista matematico, una funzione è l'associazione di un valore ad un punto di uno spazio avente un'infinità di dimensioni), si possono utilizzare degli "assi" costruiti con l'aiuto di un insieme infinito di funzioni sinusoidali. In termini più precisi: Fourier ha mostrato che si può rappresentare una funzione $f(x)$ con una somma infinita di funzioni seno e coseno della forma $\sin(ax)$ o $\cos(ax)$, ciascuna di esse con un certo coefficiente.

Queste "basi di Fourier" sono diventate un mezzo essenziale, di uso molto frequente nelle scienze, perchè esse servono a rappresentare tanti tipi di funzione, quindi tante grandezze fisiche. In particolare si utilizzano anche per rappresentare suoni o immagini. Tuttavia, gli ingegneri sanno bene che queste sinusoidi sono lontane dall'essere ottimali per descrivere segnali così complessi come le immagini: esse non rappresentano efficacemente delle strutture transitorie come i contorni di una immagine.

...in seguito è arrivata la "trasformata in wavelets"

Gli specialisti del trattamento dei segnali non sono stati gli unici a prendere coscienza dei limiti delle basi di Fourier. Negli anni '70, un ingegnere-geofisico francese, Jean Morlet, si è reso conto che esse non erano i migliori strumenti matematici per esplorare la conformazione del sottosuolo; questo ha condotto alla scoperta - nel laboratorio di Elf-Aquitaine - della *trasformata in wavelets*. Questo metodo matematico, basato su un insieme di funzioni di basi diverse dalle funzioni sinusoidali utilizzate nel metodo di Fourier, sostituisce vantaggiosamente la *trasformata di Fourier* in certe situazioni. D'altra parte, negli anni '30, i fisici si erano accorti che le basi di Fourier non erano molto adatte per analizzare lo stato di un atomo. Questo problema è stato all'origine di numerosi lavori che ulteriormente hanno contribuito molto alla teoria delle wavelets. Sempre durante gli anni '30, alcuni matematici hanno tentato di migliorare le basi di Fourier per analizzare le strutture singolari localizzate; questo ha aperto un importante programma di ricerca tuttora molto attivo. In altre parole, una moltitudine di scienziati ha sviluppato, con i mezzi a disposizione, delle opportune modifiche delle basi di Fourier. Negli anni '80, Yves Meyer, un matematico francese, ha scoperto le prime basi di wavelets ortogonali (l'ortogonalità designa una proprietà che facilita molto i ragionamenti ed i calcoli; le basi di Fourier sono anch'esse ortogonali). Questa scoperta, seguita da qualche incontro improvvisato attorno a fotocopiatrici o tavoli dei caffè, ha avviato in Francia un vasto movimento scientifico pluridisciplinare, il cui impatto internazionale fu notevole. Le applicazioni della teoria e degli algoritmi di wavelets hanno fatto il loro cammino non solamente in numerosi campi scientifici e tecnologici, ma sono anche all'origine della creazione di moltissime imprese negli Stati Uniti d'America.

La matematica delle wavelets ha giocato un ruolo centrale in numerose aree

Questo tipo di matematica è stata di fondamentale importanza per catalizzare idee, "ripulire" concetti e approfondire la ricerca. Nell'analizzare i concetti fondamentali delle specifiche applicazioni, tale teoria ha permesso a scienziati che lavoravano in campi molto diversi – nella fisica, nel trattamento dei segnali, in informatica, etc... – di rendersi conto che utilizzavano gli stessi strumenti. Andare oltre, affinare questi strumenti di lavoro, migliorare le loro prestazioni: questi moderni lavori matematici sull'analisi di Fourier hanno reso possibile tutto ciò. Infine questa teoria ha fornito una tecnica standard di calcolo scientifico (la trasformata in wavelets rapide), ottenuta grazie alla collaborazione tra matematici e specialisti in teoria dei segnali. L'immagine della figura 1C è stata pertanto ottenuta grazie alle stesse basi di wavelets usate in statistica, in sismica o nel calcolo scientifico, applicando l'algoritmo di trasformata rapida. Mediante l'uso dello standard internazionale JPEG-2000 per la compressione delle immagini, queste wavelets invadono tutti i settori nei quali abbia rilevanza una immagine, da internet agli apparecchi fotografici digitali e perfino ai satelliti.

Rimane da costruire un ponte tra il mondo delle wavelets e quello della geometria

Le basi di Fourier non erano state ben adattate all'analisi dei fenomeni transitori come invece lo sono le basi di wavelets. È la conclusione della storia? No. Nel trattamento delle immagini, come in tutti gli altri settori dove le wavelets sono divenute un mezzo di base, tutti cercano di risolvere attualmente lo stesso tipo di problema: esplorare le regolarità geometriche. In effetti, si dice che una immagine, per complessa che sia, può essere ben rappresentata da un disegno composto da relativamente pochi tratti e, spesso, i contorni degli oggetti raffigurati si possono assimilare a delle curve geometriche abbastanza semplici. Sfruttare queste analogie geometriche e la regolarità di queste curve dovrebbe quindi permettere di migliorare considerevolmente i risultati ottenuti fino a oggi; ma la teoria delle wavelets, per il momento, non ne è capace. La costruzione di questo ponte con il mondo della geometria genera difficili problemi matematici. Tuttavia la posta scientifica ed industriale in gioco è importante e c'è da aspettarsi progressi significativi rilevanti nei prossimi anni.

Stéphane Mallat
Dipartimento di Matematica Applicata,
Scuola politecnica, Palaiseau

Alcuni riferimenti bibliografici:

- B. B. Hubbard, *Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique* (Pour la Science/Belin, 1995).
- S.Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes* (Ècole polytechnique/ Ellipses, 2000).
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents* (Hermann, 1992).