Introduzione al concetto di matrice

Introduction to the concept of matrix

Serenella Iacino [1]

Abstract

The author wrote this lesson for students of the third year of Liceo Matematico; here, she introduces the concept of matrix, with its operations and the calculus of its determinant, talking about examples of real life, to stimulate students' cooperation.

Introduzione

L'argomento delle Matrici viene introdotto attraverso un esempio riguardante l'economia mensile della famiglia Rossi e della famiglia Verdi che ogni mese sono alle prese con le spese familiari riguardanti la salute, i generi alimentari, le tasse e le varie uscite ludiche.
Ipotizziamo che le due famiglie siano entrambe costituite da quattro persone:

1. PADRE – P
2. MADRE – M
3. FIGLIO1 – F1
4. FIGLIO2 – F2

e che la seguente tabella rappresenti le spese delle due famiglie relative al mese di Gennaio:

Spesa in euro / Famiglia	SALUTE	GENERI ALIMENTARI	TASSE	USCITE LUDICHE
ROSSI	300	500	400	300
VERDI	400	600	300	400

essa può essere scritta anche in questo modo:

$$G = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 400 & 300 \\ 400 & 600 & 300 & 400 \end{pmatrix}$$

tale quadro di numeri viene detto MATRICE.
In generale una matrice A è un insieme di numeri disposti in righe orizzontali e colonne verticali come nella seguente figura:

[1] Liceo Scientifico Statale "Isaac Newton", Roma (RM), e-mail: iacinella@libero.it.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{m righe}$$

$$\downarrow \text{n colonne}$$

e la sua dimensione è data dal numero m di righe orizzontali e dal numero n di colonne verticali, pertanto una matrice del genere è detta (m x n).
Ciascun elemento a_{ij} , che occupa la i – esima riga e la j – esima colonna, è detto coefficiente della matrice, con $i = 1, \dots , m$, e $j = 1, \dots , n$.
Nell'esempio numerico precedente la matrice è una (2 x 4) ovvero due righe e quattro colonne; in questo caso, in cui il numero di righe è diverso dal numero delle colonne, la matrice è detta RETTANGOLARE.
Quando invece il numero m delle righe è uguale al numero n delle colonne, la matrice è detta QUADRATA, e quel numero $m = n$ rappresenta l'ORDINE della matrice; in questa matrice si chiamano ELEMENTI PRINCIPALI quelli del tipo a_{ii} , ovvero quelli in cui l'indice di riga è uguale a quello della colonna e si trovano disposti sulla DIAGONALE PRINCIPALE di estremi a_{11} e a_{nn} , come nella seguente figura:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Analogamente si chiama DIAGONALE SECONDARIA quella formata da tutti gli elementi disposti sulla diagonale di estremi a_{n1} e a_{1n} come nella seguente figura:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Operazioni con le matrici

Ritorniamo al nostro esempio delle spese familiari delle famiglie Rossi e Verdi del mese di Gennaio

$$G = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 400 & 300 \\ 400 & 600 & 300 & 400 \end{pmatrix}$$

e consideriamo anche quelle relative al mese di Febbraio, qui rappresentate dalla tabella *F*:

$$F = \begin{pmatrix} 250 & 400 & 300 & 250 \\ 300 & 500 & 300 & 350 \end{pmatrix}$$

Se vogliamo avere il quadro delle spese delle due famiglie relative al primo bimestre dell'anno, specificando ogni singola voce del bilancio, possiamo scrivere:

$$G + F = \begin{pmatrix} 300+250 & 500+400 & 400+300 & 300+250 \\ 400+300 & 600+500 & 300+300 & 400+350 \end{pmatrix}$$

in generale date due matrici:

$$G = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad F = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$$

definiamo MATRICE SOMMA di *G* ed *F*

$$G + F = \begin{pmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ a'+e' & b'+f' & c'+g' & d'+h' \end{pmatrix}$$

la matrice ottenuta sommando i termini che occupano lo stesso posto, detti CORRISPONDENTI; pertanto questa operazione è possibile solo tra matrici aventi, come nel caso precedente, lo stesso numero di righe e di colonne.

Se invece volessimo conoscere la variazione tra le spese del mese di Gennaio e quelle del mese di Febbraio, basterebbe eseguire la differenza tra gli elementi corrispondenti delle due matrici *G* ed *F* in questo modo:

$$G - F = \begin{pmatrix} 300-250 & 500-400 & 400-300 & 300-250 \\ 400-300 & 600-500 & 300-300 & 400-350 \end{pmatrix}$$

in generale definiamo MATRICE DIFFERENZA tra *G* ed *F*

$$G - F = \begin{pmatrix} a-e & b-f & c-g & d-h \\ a'-e' & b'-f' & c'-g' & d'-h' \end{pmatrix}$$

la matrice ottenuta sottraendo i termini corrispondenti di *G* ed *F*.

Data la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 250 & 400 & 300 & 250 \\ 300 & 500 & 300 & 350 \end{pmatrix}$$

quella formata dagli elementi di segno opposto

$$-F = \begin{pmatrix} -250 & -400 & -300 & -250 \\ -300 & -500 & -300 & -350 \end{pmatrix}$$

è detta MATRICE OPPOSTA; pertanto l'operazione differenza tra due matrici, può anche essere vista come la somma della prima matrice con l'opposta della seconda, ovvero:

$$G - F = G + (-F).$$

Se le spese per le due famiglie nel mese di Marzo sono state doppie rispetto a quelle di Febbraio, potremmo scrivere la matrice relativa al mese di Marzo a partire dalla matrice *F* in questo modo:

$$M = 2 \cdot F = \begin{pmatrix} 2 \cdot 250 & 2 \cdot 400 & 2 \cdot 300 & 2 \cdot 250 \\ 2 \cdot 300 & 2 \cdot 500 & 2 \cdot 300 & 2 \cdot 350 \end{pmatrix}$$

o in generale:

$$M = 2 \cdot \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot e & 2 \cdot f & 2 \cdot g & 2 \cdot h \\ 2 \cdot e' & 2 \cdot f' & 2 \cdot g' & 2 \cdot h' \end{pmatrix}$$

abbiamo qui eseguito l'operazione di prodotto di una matrice per il numero 2 moltiplicando tutti gli elementi della matrice per il numero stesso.
In generale definiamo il PRODOTTO di un NUMERO REALE *k* per una MATRICE *M*, quella matrice, $k \cdot M$, i cui elementi sono moltiplicati per il numero *k*:

$$M = k \cdot \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot e & k \cdot f & k \cdot g & k \cdot h \\ k \cdot e' & k \cdot f' & k \cdot g' & k \cdot h' \end{pmatrix}$$

Le famiglie Rossi e Verdi hanno stipulato un abbonamento telefonico mensile con le medesime condizioni tariffarie.
La seguente tabella indica il numero dei minuti che mensilmente consuma al telefono ciascun membro delle famiglie Rossi e Verdi:

Minuti mensili consumati / Famiglia	*Minuti mensili consumati dal PADRE*	*Minuti mensili consumati dalla MADRE*	*Minuti mensili consumati dal FIGLIO 1*	*Minuti mensili consumati dal FIGLIO 2*
ROSSI	*a*	*b*	*c*	*d*
VERDI	*a'*	*b'*	*c'*	*d'*

Anche questa nuova tabella può essere sintetizzata mediante la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Mentre la tabella, qui di seguito, indica il costo tariffario relativo al consumo telefonico al minuto da parte dei membri di ciascuna delle due famiglie:

Costo al minuto / Membri famiglia	*Costo tariffario al minuto*
PADRE P	*e*
MADRE M	*f*
FIGLIO 1	*g*
FIGLIO 2	*h*

che, analogamente, può essere scritta sotto forma di matrice nel seguente modo:

$$B = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

La matrice *B* e tutte quelle costituite da una sola colonna sono chiamate VETTORI – COLONNA, mentre le matrici costituite da una sola riga sono chiamate VETTORI – RIGA.

Se si volesse determinare la spesa telefonica complessiva mensile della famiglia Rossi e della famiglia Verdi, dovremmo eseguire i seguenti calcoli:

$$C = \begin{pmatrix} a \cdot e \ + \ b \cdot f \ + \ c \cdot g \ + \ d \cdot h \\ a' \cdot e + b' \cdot f + c' \cdot g + d' \cdot h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} spesa\ complessiva\ mensile\ famiglia\ Rossi \\ spesa\ complessiva\ mensile\ famiglia\ Verdi \end{pmatrix}$$

per capire meglio l'esempio precedente possiamo riscrivere le matrici *A* e *B* di partenza attraverso gli indici in questo modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}$$

per cui la matrice *C*, a partire da *A* e *B*, si può scrivere come:

$$C = A\ x\ B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + a_{14} \cdot b_{41} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

questa matrice così ottenuta la chiameremo PRODOTTO TRA LE DUE MATRICI *A* e *B*; come si vede essa si ottiene moltiplicando ordinatamente gli elementi delle righe di *A* per gli elementi delle colonne di *B* per poi sommarli, per questo motivo il PRODOTTO tra matrici è detto PRODOTTO RIGA – COLONNA; inoltre è chiaro che l'operazione è stata possibile perché la matrice *A* ha quattro colonne e *B* quattro righe (nell'esempio era naturale che ciò accadesse perché ad ognuno dei quattro componenti delle due famiglie corrispondeva una delle quattro diverse tariffe). In generale il prodotto tra due matrici *A* e *B* è possibile solo se il numero di colonne della prima matrice *A* = (*m* x *n*) è uguale al numero di righe della seconda matrice *B* = (*n* x *p*). Si osservi inoltre che la matrice *C*, risultato dell'operazione, ha dimensione (2 x 1), ma questo accade in generale, ovvero la matrice prodotto *C* = *A* x *B* avrà lo stesso numero di righe di *A* e lo stesso numero di colonne di *B*, ovvero *C* sarà del tipo (*m* x *p*).
E' importante osservare che in generale IL PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO; infatti se volessimo calcolare in questo caso il prodotto *B* x *A*, questo non sarebbe possibile in quanto il numero delle colonne della prima matrice *B* è diverso dal numero di righe della seconda matrice *A*; e anche quando in altri casi il prodotto è possibile, in generale non darà lo stesso risultato.

Definizione del determinante di una matrice

Consideriamo il seguente problema algebrico: Giulia e Flavia sono due sorelle; la somma delle loro età è 25 e il doppio dell'età di Giulia è uguale al triplo dell'età di Flavia. Quanti anni hanno Giulia e Flavia?
Dopo aver indicato con *x* l'età di Giulia e con *y* l'età di Flavia, traduciamo i dati del problema nel seguente sistema lineare in due incognite:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{o piu' in generale} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

il sistema può essere riscritto utilizzando il simbolismo delle matrici: infatti se $A = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ è la matrice costituita dai coefficienti delle incognite, se $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è la matrice vettore-colonna delle incognite e $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ è la matrice vettore-colonna dei termini noti, allora possiamo scrivere il sistema precedente attraverso il prodotto tra matrici nel seguente modo:

$$A \text{ x } X = C \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o in generale} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema precedente con uno dei metodi studiati nel biennio si arriva alla seguente soluzione particolare:

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \qquad \text{o in generale} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \\ y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ammetterà soluzioni se risulta $ab' - a'b \neq 0$; questo numero, che contiene solo i coefficienti della matrice quadrata *A*, lo chiameremo DETERMINANTE di *A* e lo indichiamo in questo modo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Come possiamo osservare il suo valore è dato dalla differenza fra il prodotto dei due elementi della diagonale principale e il prodotto dei due elementi della diagonale secondaria.

Ma anche $(cb' - c'b)$ rappresenta il valore del determinante della matrice $\begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix}$ ovvero

$$cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

e anche $(ac' - a'c)$ rappresenta il valore del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$ ovvero

$$ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Le soluzioni del sistema precedente possono allora essere riscritte così attraverso il rapporto dei seguenti determinanti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$ [2]

In generale vedremo ora che ad ogni matrice quadrata del tipo (*m* x *m*) viene associato un numero detto determinante della matrice.

Consideriamo ora il caso in cui *m* = 1. Partiamo dall'equazione di primo grado $a \cdot x = b$ che può essere

[2] Tale regola è nota, dagli studi precedenti del 2° anno di liceo scientifico, come METODO RISOLUTIVO di CRAMER di un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

riscritta utilizzando il simbolismo delle matrici: per cui se $A = (a)$, se $X = (x)$ e se $B = (b)$ l'equazione prende la forma matriciale:

$$A\ x\ X = B \quad \rightarrow \quad (a)\ x\ (x) = (b).$$

Sappiamo che la soluzione dell'equazione è

$$x = \frac{b}{a}$$

ed è vera solo se $a \neq 0$; possiamo scrivere questa soluzione come rapporto di determinanti nel seguente modo

$$x = \frac{|b|}{|a|} = \frac{b}{a}$$

in altri termini, se una matrice come $A = (a)$ è costituita da un solo elemento, ovvero è del primo ordine, per analogia con il caso precedente, definiremo come DETERMINANTE di A l'elemento stesso:

$$\det(A) = |a| = a.$$

Consideriamo ora il caso in cui m = 3. A tale scopo scriviamo un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

che attraverso il seguente simbolismo matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

può essere riscritto, analogamente ai casi precedenti, nel seguente modo:

$$A\ x\ X = D \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema con uno dei metodi studiati al biennio si arriva alle seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{db'c'' + bc'd'' + cd'b'' - (cb'd'' + dc'b'' + bd'c'')}{ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - (cb'a'' + ac'b'' + ba'c'')} \\ y = \dfrac{ad'c'' + dc'a'' + ca'd'' - (cd'a'' + ac'd'' + da'c'')}{ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - (cb'a'' + ac'b'' + ba'c'')} \\ z = \dfrac{ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - (db'a'' + ad'b'' + ba'd'')}{ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - (cb'a'' + ac'b'' + ba'c'')} \end{cases}$$

accettabili solo se il denominatore di ciascuna soluzione è diverso da zero:

$$ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - (cb'a'' + ac'b'' + ba'c'') \neq 0.$$

Tale denominatore contiene solo i coefficienti della matrice *A* e, per analogia con i casi precedenti, definiremo questa espressione DETERMINANTE di una matrice *A (3* x *3)* e lo indichiamo in questo modo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Si potrebbe dimostrare che anche i numeratori delle soluzioni *x*, *y* e *z* del sistema possono essere scritti sotto forma di determinanti e pertanto le soluzioni si possono così scrivere:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & d & d \\ a' & d' & d' \\ a'' & d'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

Per calcolare il determinante di una matrice *A* del terzo ordine potremmo utilizzare un procedimento particolare denominato REGOLA di SARRUS, che consiste nello scrivere il determinante di *A*, ricopiare a destra del determinante le prime due colonne della matrice, sommare i prodotti dei termini lungo la diagonale principale e lungo le due diagonali parallele ad essa, per poi sottrarre i prodotti dei termini lungo la diagonale secondaria e lungo le due diagonali parallele ad essa:

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{matrix}\right| =$$

$$= ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - (cb'a'' + ac'b'' + ba'c'')$$

Facciamo ora un esempio numerico per il calcolo di un determinante del terzo ordine con la regola di Sarrus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -2 & -1 & 0 \\ +5 & +2 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} +1 & -2 & +3 \\ -2 & -1 & 0 \\ +5 & +2 & -3 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} +1 & -2 \\ -2 & -1 \\ +5 & +2 \end{matrix}\right| = 3 - 12 + 15 + 12 = +18.$$ [3]

Allo stesso risultato si può pervenire utilizzando IL METODO dei COMPLEMENTI ALGEBRICI (o di LAPLACE) e lo si può estendere alle matrici di ordine successivo. Per iniziare scriviamo la matrice *A* del terzo ordine utilizzando gli indici di riga e colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

[3] Il metodo di Sarrus può essere utilizzato solo per il calcolo del determinante di una matrice di ordine tre.

il metodo consiste nel sommare i prodotti degli elementi di una qualsiasi riga (o colonna) di A per i corrispondenti complementi algebrici, dove per complemento algebrico dell'elemento generico a_{ij} si intende una matrice di ordine 2 che si può estrarre da A sottraendo la riga e la colonna a cui il termine a_{ij} appartiene, preceduto dal segno $+ o -$ a seconda se $i + j = numero\ pari$ o $i + j = numero\ dispari$; pertanto, se prendiamo in considerazione, ad esempio, la prima riga della matrice A, il suo determinante si calcola così:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ [4]

Applicando questo procedimento al calcolo del determinante precedente: $\begin{vmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -2 & -1 & 0 \\ +5 & +2 & -3 \end{vmatrix}$ otteniamo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} +1 & -2 & +3 \\ -2 & -1 & 0 \\ +5 & +2 & -3 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ +2 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ +5 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ +5 & +2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (3 - 0) + 2 \cdot (+6 - 0) + 3 \cdot (-4 + 5) = +18.$$

Con la definizione di determinante possiamo ritenere conclusa la prima ora di lezione.
Accenniamo qui di seguito, come Appendice, una breve trattazione atta a mostrare l'utilità delle matrici e dei determinanti nella risoluzione dei sistemi lineari.

Appendice

L'utilità delle matrici nei sistemi lineari potremmo evidenziarla attraverso il METODO della MATRICE INVERSA che è un metodo che ricalca, formalmente, la soluzione di un'equazione di primo grado ad una sola variabile.

Chiamiamo MATRICE IDENTICA *I* (*m* x *m*), una matrice quadrata che ha tutti elementi unitari sulla diagonale principale e tutti gli altri elementi nulli.

Una matrice quadrata *A* del tipo (*m* x *m*) si dice che è INVERTIBILE se esiste un'altra matrice quadrata A^{-1} detta MATRICE INVERSA di *A* dello stesso tipo tale che il prodotto matriciale tra le due fornisce la matrice identica *I* (*m* x *m*), ovvero:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Pertanto, partendo dal sistema lineare risolutivo del problema precedente $\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$, vediamo come si calcola la matrice inversa A^{-1} della matrice *A* del tipo (*2* x *2*) costituita dai coefficienti delle incognite, tenendo presente che il determinante di *A* deve essere diverso da zero affinché il sistema ammetta soluzione, così come si è già detto nel paragrafo precedente; possiamo osservare che il determinante diverso da zero è una condizione primaria affinché una qualsiasi matrice quadrata sia invertibile:

$$A = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{poiché } \det(A) = -5 \neq 0 \ \text{ esisterà la matrice inversa} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Andiamo quindi a determinare la matrice inversa:

---

[4] Ovviamente prenderemo in considerazione la riga o la colonna dove compaiono più zeri per semplificare i calcoli.

$$A^{-1} \cdot A = I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} & a_{11} - 3a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} & a_{21} - 3a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uguagliando i termini che occupano lo stesso posto, risolviamo il seguente sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 1 \\ a_{11} - 3a_{12} = 0 \\ a_{21} + 2a_{22} = 0 \\ a_{21} - 3a_{22} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{11} = +\frac{3}{5} \\ a_{12} = +\frac{1}{5} \\ a_{21} = +\frac{2}{5} \\ a_{22} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

per cui la matrice inversa di A è la seguente:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +\dfrac{3}{5} & +\dfrac{1}{5} \\ +\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

A questo punto riprendiamo il sistema lineare precedente:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad dove \quad A = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +2 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui se $A\,x\,X = C$, la soluzione X si ottiene moltiplicando ambo i membri dell'equazione per la matrice inversa A^{-1} di A, ovvero:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\dfrac{3}{5} & +\dfrac{1}{5} \\ +\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad x = 15 \quad \text{e} \quad y = 10$$

Bibliografia

[1] G. Zwirner – L. Scaglianti, *Strutture – Funzioni, vol.1*, Cedam
[2] M. Bergamini – A. Trifone, *Algebra lineare*, Zanichelli
[3] N. Dodero – P. Baroncini – R. Manfredi, *Elementi di matematica, vol.3*, Ghisetti e Corvi