Utilizzi del calcolo letterale

Francesco Daddi [1]

Abstract

In these pages, we present an educational activity aiming to highlight the importance of literal calculation including factoring, in arithmetic problems that, at first glance, have nothing to do with all the rules given to pupils in the year before scientific secondary school. Often, in fact, little importance is given to demonstrations in the arithmetic-algebraic field, emphasising only demonstrations related to the geometric field. Instead, I think it is fundamental to crop part of the programme to aspects highlighting the synergy and natural continuity between arithmetic and literal calculation, which help consolidate algebraic abilities on one hand, and on the other, help us understand a nodal concept in mathematics: the concept of demonstration. From an educational viewpoint, it is essential to proceed following a succession of specially formulated examples.

In queste pagine si mostra un'attività didattica svolta nel corso degli ultimi anni scolastici nei licei scientifici in cui ho insegnato. Il percorso didattico si pone principalmente lo scopo di mettere in evidenza l'importanza del calcolo letterale, fattorizzazioni incluse, in problemi aritmetici che, a prima vista, nulla hanno a che spartire con tutte le regole che vengono dispensate agli alunni della classe prima. Spesso, infatti, viene dato poco rilievo alle dimostrazioni in ambito aritmetico-algebrico, mettendo in luce solo quelle relative al campo geometrico. Ritengo, invece, fondamentale ritagliare parte del programma ad aspetti che

[1] *Liceo Scientifico "E. Fermi" Cecina (LI)*

mettano in risalto la sinergia e la naturale continuità tra aritmetica e calcolo letterale, che aiutino da un lato a consolidare le abilità algebriche, dall'altro a comprendere un concetto nodale in matematica: quello di dimostrazione.

Dal punto di vista didattico, è essenziale procedere seguendo una successione di esempi appositamente formulati.

Esempio 1. *Si stabilisca se è possibile calcolare la differenza dei quadrati di due numeri se sono noti solamente la loro somma s e la loro differenza d.*

Visto che $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) = s \cdot d$, la differenza dei quadrati è uguale al prodotto $s \cdot d$.

Il primo esempio proposto ha l'obiettivo di inquadrare un "classico" del calcolo letterale – la differenza di quadrati – in un'ottica aritmetica. Spesso questo collegamento è assente e i ragazzi ritengono che il calcolo letterale sia completamente avulso da tutta la matematica precedente, come se si trattasse di una parte interamente nuova della materia studiata. Un compito basilare dell'insegnante deve perciò consistere nel presentare la matematica come un "tutt'uno integrato", da contrapporre alla visione "distorta" che la concepisce come una struttura suddivisa in compartimenti stagni e in capitoli autosufficienti.

Esempio 2. *Si dimostri che, se un numero naturale n non è divisibile né per 2 né per 3, allora il numero $n^2 - 1$ è divisibile per 24.*

Prima di tutto è buona regola invitare la classe a fare alcune prove − sostituendo dei numeri al posto di n − per controllare se vi sono degli errori nel testo e per prendere confidenza con il problema stesso. È bene ribadire che queste prove numeriche non costituiscono una dimostrazione, ma è necessario seguire altre vie, che sappiano abbracciare tutti i casi con un solo calcolo e/o ragionamento.

Il numero n è dispari, $(n + 1)$ e $(n - 1)$ sono pari e uno di essi è multiplo di 4; da ciò segue che $n^2 - 1 = (n + 1) \cdot (n - 1)$ è multiplo di $4 \cdot 2 = 8$. Inoltre, poiché n non è multiplo di 3, almeno uno tra $(n + 1)$ e $(n - 1)$ è multiplo di 3. In definitiva $n^2 - 1 = (n + 1) \cdot (n - 1)$ è multiplo di $8 \cdot 3 = 24$.

L'esercizio non è semplice e presuppone un non banale schema di ragionamento che punta sulle proprietà dei numeri naturali. D'altra parte rinunciare a proporre questo tipo di problemi non è, a mio modo di vedere, la risposta giusta a quella cronica carenza per quanto concerne la dimestichezza con l'aritmetica di base, riscontrata personalmente negli anni, nei vari ordini e/o indirizzi di scuola in cui ho insegnato.

Esempio 3. *Dimostra che il quadrato di un numero naturale che finisce per 76 finisce anch'esso per 76.*

Un numero naturale che finisce per 76 può essere scritto nella forma

$$100\,n + 76$$

dove n è un numero naturale; questa è forse uno dei concetti più difficile da far capire agli studenti, almeno nella fase iniziale di questi esercizi.

Se calcoliamo il suo quadrato si ottiene

$$(100\,n + 76)^2 = 10000\,n^2 + 2 \cdot 100\,n \ \cdot 76 + 5776$$

i primi due addendi sono multipli di 100, quindi conviene mettere in evidenza 100

$$(100\,n + 76)^2 = 100 \cdot (100\,n^2 + 152\,n) + 5776$$

il numero 5776 può essere riscritto nella forma $5776 = 5700 + 76$, quindi

$$(100\,n + 76)^2 = 100 \cdot (100\,n^2 + 152\,n + 57) + 76$$

da cui la tesi.

Facendo riferimento all'esempio presentato, per potenziare l'apprendimento si lascia agli alunni la dimostrazione di un fatto più generale: *il quadrato di un numero naturale che finisce per 376 finisce anch'esso per 376.*

Non è semplice abituare i discenti a riscrivere un'espressione algebrica in un modo più "complicato"; a parer mio si dedica troppo tempo alla semplificazione delle espressioni algebriche, comunicando alla classe che l'importante è ridurre il più possibile il numero di termini. Ma spesso, in matematica, ciò che conta davvero è individuare la struttura che sta alla base dell'oggetto che stiamo analizzando; se “sintetizziamo” troppo, si rischia di non avere chiaro lo “scheletro” dell’ente matematico sotto esame. Un esempio su tutti: la tecnica del completamento del quadrato non semplifica l’espressione ma aggiunge dei termini che prima non erano presenti, ma il tutto è giustificato dal fine che dobbiamo perseguire. Per fare un altro esempio, evitando di “scomodare” una tecnica piuttosto raffinata come il completamento del quadrato, possiamo pensare alla somma delle frazioni: per calcolare $\frac{1}{3}+\frac{7}{4}$ riscriviamo i due addendi in un modo più “complicato”

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{4}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{4}{12}+\frac{21}{12}=\frac{25}{12}\,.$$

Sfortunatamente non sono numerose le scelte didattiche che fanno notare questi aspetti e che puntano sulla “scoperta” e sulla costruzione coerente e consequenziale dei vari fatti matematici; al contrario, si assiste ad una serie “martellante” di indicazioni e precetti, spesso senza un vero e proprio filo logico che metta tutto assieme.

Esempio 4. *Si dimostri che il cubo di un numero intero che finisce per 2 finisce per 8. Si dimostri inoltre che la penultima cifra (cioè quella che viene scritta prima dell’8 finale) è pari.*

Un numero che finisce per 2 può essere scritto nella forma $10\,n+2$ ed il suo cubo è uguale a

$$(10\,n+2)^3=1000\,n^3+600\,n^2+120\,n+8$$

e mettendo in evidenza 10 nei primi tre termini

$$(10\,n+2)^3=10\cdot(100\,n^3+60\,n^2+12\,n)+8$$

si conclude che l’ultima cifra è 8.

Osservando che la parentesi è una somma di numeri pari, si conclude che la penultima cifra di $(10\,n+2)^3$, che coincide con l’ultima cifra del numero tra parentesi, è pari.

Esempio 5. *Al quadrato di un numero naturale dispari viene sommato il quadruplo del successivo del numero dispari. Si dimostri che si ottiene un quadrato perfetto.*

Indicato con $2n + 1$ il numero dispari, si ha

$$(2n + 1)^2 + 4 \cdot (2n + 2) = 4\, n^2 + 12\, n + 9$$

si riconosce subito che il trinomio è il quadrato di $2n + 3$, ovvero del dispari successivo.

L'esercizio vuole rivolgere l'attenzione sull'importanza del linguaggio: non sono pochi gli studenti che confondono, ad esempio, "*quadruplo del successivo*" con "*successivo del quadruplo*". Le difficoltà lessicali e, più in generale, di comprensione del testo di un esercizio, sono sempre in agguato a qualsiasi livello scolastico, per spingersi – purtroppo – anche oltre in ambito universitario. Il docente deve avere pazienza e guidare i discenti attraverso degli opportuni esempi.

Esempio 6. *Si dimostri che la somma dei quadrati di due numeri naturali dispari consecutivi è un numero pari ma non è divisibile per 4.*

In questo caso è conveniente indicare il numero minore con $2n - 1$ (questi "trucchi" si acquisiscono con il tempo, ma è bene far capire fin da subito che spesso facilitano notevolmente i calcoli); la somma dei quadrati diventa

$$(2\, n - 1)^2 + (2\, n + 1)^2 = 8\, n^2 + 2 = 4 \cdot 2\, n^2 + 2$$

ossia si ha un multiplo di 4, a cui viene sommato 2; abbiamo ottenuto di conseguenza un numero pari, ma non divisibile per 4.

Alcuni ragazzi non capiscono quando utilizzare la forma $2n + 1$, quando invece $2n - 1$: l'essenziale è far capire che un numero dispari *qualsiasi* può essere espresso indifferentemente con entrambe le "configurazioni". Per rafforzare questa moltitudine di rappresentazioni, possiamo dividere la classe in più gruppi ed assegnare a ciascuno di essi una forma: al primo gruppo diamo $2n + 1$, al secondo gruppo $2k - 1$, al terzo $2z + 3$, al quarto $2h - 3$, ecc. Il docente, in un secondo tempo, scrive alla lavagna un numero dispari e invita ciascun gruppo ad individuare il valore dell'incognita; in questo modo è chiaro che stiamo parlando della stessa cosa (in questo caso un numero dispari), ma ognuno la esprime nella sua “lingua”. Volendo, tutto questo può essere un metodo, ovviamente non convenzionale, per introdurre i cambiamenti di coordinate!

Per rafforzare la rilevanza tecnica della rappresentazione di un numero dispari, può essere utile proporre il seguente esercizio.

Esempio 7. *Si dimostri che la differenza delle potenze quinte di due numeri dispari che differiscono di 6 è divisibile per 6.*

Per minimizzare la mole di calcoli, conviene indicare i due numeri come $2n-3$ e $2n+3$. La differenza delle potenze quinte è

$$(2n+3)^5-(2n-3)^5=480\,n^4+2160\,n^2+486$$

e mettendo in evidenza 6 si ottiene

$$(2n+3)^5-(2n-3)^5=6\cdot(80\,n^4+360\,n^2+81)$$

da cui la tesi.

Anche in questo caso è interessante lasciare agli scolari più volenterosi la risoluzione dello stesso esercizio, utilizzando però l’espressione

$$(2n+7)^5-(2n+1)^5=$$

$$=6\cdot(80\,n^4+640\,n^3+2280\,n^2+4000\,n+2801).$$

La mole di calcoli supplementare convince agevolmente la classe della “bontà” della scelta effettuata in precedenza.

È comunque stimolante cercare di generalizzare, estendendo il risultato anche alle coppie di numeri pari che differiscono di 6; indicati con x, y due numeri interi tali che $x-y=6$, la differenza delle loro potenze quinte è uguale a

$$x^5-y^5=(x-y)\cdot(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=$$

$$=6\cdot(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

da cui la tesi.

Esempio 8. *Si consideri un numero naturale e il numero che si ottiene sommando 4. Si considerino poi i loro rispettivi successivi. Si dimostri che, se sommiamo 4 al prodotto dei quattro numeri, si ottiene un quadrato perfetto.*

Se indichiamo con n il primo numero, il prodotto è uguale a

$$n \cdot (n+4) \cdot (n+1) \cdot (n+5) + 4 = n^4 + 10\,n^3 + 29\,n^2 + 20\,n + 4$$

ora dobbiamo dimostrare che il polinomio di quarto grado è il quadrato di un polinomio $Q(x)$: ovviamente $Q(x)$ deve avere grado 2 e deve essere monico (il coefficiente direttore deve cioè essere uguale a 1), quindi della forma

$$Q(x) = n^2 + a\,n + 2\,.$$

Dovendo essere

$$(n^2 + a\,n + 2)^2 = n^4 + 10\,n^3 + 29\,n^2 + 20\,n + 4$$

si arriva all'equazione

$$[(2a-10)n^2 + (a^2-25)n + 4a - 20] \cdot n = 0$$

che è risolta da qualsiasi n se e solo se risulta $a = 5$. In definitiva abbiamo

$$(n^2 + 5n + 2)^2 = n^4 + 10\,n^3 + 29\,n^2 + 20\,n + 4\,.$$

L'esercizio proposto è interessante perché costituisce un'applicazione delle fattorizzazioni. Chiaramente gli studenti sono in difficoltà di fronte al polinomio $n^4 + 10\,n^3 + 29\,n^2 + 20\,n + 4$, non sapendo quale strada intraprendere. Il docente deve mettere in luce il testo dell'esercizio, che suggerisce l'itinerario da seguire, fornendo lo scopo finale ("[…] *si ottiene un quadrato perfetto"*). Si otterrebbe senza alcun dubbio un esito diverso se il testo fosse formulato in modo alternativo; ad esempio, con la variante *"[…] Dopo aver aggiunto 4 al prodotto, si descrivano le proprietà salienti del numero ottenuto*", l'intera classe si troverebbe senza una "bussola" e sarebbe costretta a fare preventivamente delle congetture prima di intuire, mediante alcune prove, che il risultato è sempre un quadrato perfetto. Questo aspetto, ossia quello delle prove, non deve assolutamente essere scoraggiato: lo studente deve capire che "*una grande scoperta risolve un grande problema, ma c'è un granello di scoperta nella soluzione di ogni problema. Il nostro problema potrebbe essere modesto, ma se sfida la nostra curiosità e mette in gioco le nostre facoltà inventive, e se lo ri-*

solviamo da soli, possiamo sperimentare la tensione, la gioia e il trionfo della scoperta” [G. Polya, ***La scoperta matematica***]

Esempio 9. *Si dimostri che, sommando 8 al cubo di un numero naturale, non si ottiene un numero primo.*

Indicato con n il numero naturale, mediante la formula della somma di due cubi risulta:

$$n^3 + 8 = n^3 + 2^3 = (n+2) \cdot (n^2 - 2n + 4)$$

per concludere basta osservare che

$$n + 2 \geq 2$$

$$n^2 - 2n + 4 = n^2 - 2n + 1 + 3 = (n-1)^2 + 3 \geq 3\ .$$

L’esercizio fa leva sulla somma di due cubi e, successivamente, su un utilizzo “ragionato” del completamento del quadrato, con le stime finali (i fattori devono essere maggiori di 1). Le tecniche in gioco non sono banali e solo i ragazzi più abili riescono a padroneggiarle con sicurezza ed in modo indipendente in altri contesti.

Esempio 10. *Si dimostri che i numeri del tipo $n^8 + 4$, con n intero maggiore di 1, non sono primi.*

L’idea è quella di scomporre $n^8 + 4$ come prodotto di due polinomi; li cerchiamo della forma $n^4 + t\, n^2 + 2$, per cui

$$n^8 + 4 = (n^4 + a\, n^2 + 2) \cdot (n^4 + b\, n^2 + 2)$$

da cui si ottiene

$$[(a+b)n^4 + (4+ab)n^2 + 2a + 2b] \cdot\ n^2 = 0$$

l’equazione è risolta da qualsiasi n se e solo se si ha $a = 2$, $b = -2$ oppure $a = -2$, $b = 2$. In definitiva si ha

$$n^8 + 4 = (n^4 - 2n^2 + 2) \cdot (n^4 + 2n^2 + 2)$$

e si conclude osservando che (si ricordi che dal testo sappiamo che $n > 1$)

$$n^4 - 2n^2 + 2 = n^4 - 2n^2 + 1 + 1 = (n^2 - 1)^2 + 1 > 1$$

$$n^4 + 2n^2 + 2 = n^4 + 2n^2 + 1 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 1 > 1\,.$$

In questo esercizio, al contrario del precedente, non è presente la somma di cubi e ci si deve quindi "arrangiare" in qualche modo cercando la fattorizzazione che risolve il problema. Ritengo che sia proprio questa la filosofia da seguire: provare e riprovare, aggiustando ogni volta il tiro, senza avere un itinerario prefissato. Questo contrasta sia con quella visione "popolare" della matematica come "scienza esatta", all'interno della quale non c'è spazio per la fantasia, sia con un certo tipo di didattica, attenta sostanzialmente ad impartire regole su regole, senza lasciare un po' di iniziativa allo studente che, al contrario, deve essere lasciato libero anche di sbagliare e di seguire percorsi inconcludenti: solo così acquisirà consapevolezza dei propri mezzi e conquisterà quella sufficiente sicurezza che gli consentirà di affrontare al meglio nuovi problemi. Si deve riconsiderare più in generale l'errore, che non deve più essere un ostacolo allo studio o addirittura alla ragione, ma un elemento irrinunciabile del processo conoscitivo; l'errore non solo è ineliminabile in ogni processo di ricerca, ma è anche ciò che ne consente il progresso attraverso le sue confutazioni. In sostanza non deve quindi rappresentare un fallimento educativo-didattico, ma un valido strumento che promuove l'apprendimento e ne rafforza la riuscita.

Esempio 11. *Si dimostri che è impossibile trovare un quadrato perfetto della forma* $4\,n + 3$, *dove* n *è un numero intero positivo.*

Possiamo procedere per assurdo. Dal momento che $4\,n + 3$ è dispari, supponiamo che esista un numero dispari x tale che

$$x^2 = 4\,n + 3\,.$$

Il numero x, essendo dispari, può essere scritto nella forma $x = 2\,k + 1$ da cui

$$(2\,k + 1)^2 = 4\,n + 3 \quad \rightarrow \quad 4\,k^2 + 4\,k + 1 = 4\,n + 3 \quad \rightarrow$$

$$4\,k^2 + 4\,k = 4\,n + 2$$

e l'assurdo scatta osservando che a sinistra abbiamo un multiplo di 4, mentre a destra un numero pari ma non divisibile per 4.

Il ragionamento per assurdo pone chiaramente difficoltà didattiche, ma è comunemente "accettato" nella vita di tutti i giorni, dove spesso si presenta nella forma di ragionamento *per esclusione*. Questa tecnica, per poter essere utilizzata efficacemente, deve essere proposta in vari contesti e trovo riduttivo presentarla solamente in geometria. Si provi infatti a pensare a quella che è, probabilmente, la dimostrazione per assurdo più famosa: *la prova dell'irrazionalità di* $\sqrt{2}$.

Esempio 12. *Si considerino due numeri naturali di tre cifre aventi 2 al posto centrale e tali che l'uno si ottiene dall'altro scambiando la prima con la terza cifra. Si dimostri che la differenza dei loro quadrati è un multiplo di 99.*

I due numeri sono della forma

$$100\,a + 20 + b \quad , \quad 100\,b + 20 + a$$

con a, b interi tali che $1 \leq b \leq a \leq 9$. La differenza dei quadrati è

$$(100\,a + 20 + b)^2 - (100\,b + 20 + a)^2 =$$

$$= 9999\,a^2 + 3960\,a - 3960\,b - 9999\,b^2 =$$

$$= 99 \cdot [101 \cdot (a^2 - b^2) + 40 \cdot (a - b)]$$

e quindi abbiamo concluso la dimostrazione.

Questo ultimo esempio che viene esposto è, per sua natura, abbastanza tecnico e, per una sua corretta risoluzione, sono necessari sia una completa padronanza del calcolo algebrico, sia una particolare attenzione alla corretta sequenza di operazioni da seguire.

Conclusioni

Ritengo che un'attività come quella descritta sia molto utile in quanto permette al docente di far luce su molti aspetti che, altrimenti, resterebbero inesplorati. Deve essere chiaro che, in base alle caratteristiche della classe, è possibile selezionare solo alcuni degli esempi presentati, focalizzando in ogni modo l'attenzione sulla rilevanza del calcolo letterale, affinché non risulti soltanto come "un'accozzaglia di regole da imparare".