

Ecocardiografia e dinamica dei fluidi.

Lorenzo Meneghini

Queste note nascono dalla rielaborazione dei materiali messi a punto nel 2008 come supporto didattico per un progetto PLS sviluppato presso il Liceo “Francesco Corradini” di Thiene (VI). Il progetto¹, realizzato in collaborazione con l’Ospedale di Thiene, l’Università di Padova e l’azienda Exprivia S.p.A. Corporate, prevedeva lo studio di algoritmi matematici per l’estensione delle funzioni di refertazione di Med-Station 4 ad immagini ecocardiografiche e la loro implementazione al calcolatore.

In queste note presenteremo alcuni fenomeni fisici che solitamente vengono affrontati nella programmazione curricolare dei licei scientifici, concentrandoci prevalentemente sulle loro applicazioni in ambito medico.

Particolare attenzione sarà dedicata ad alcune interpretazioni – solitamente estranee alla manualistica scolastica ma presenti in letteratura medica – relative all’equazione di Bernoulli ed all’effetto Doppler.

ELEMENTI DI MECCANICA DEI FLUIDI

Lo studio del moto delle singole particelle di un fluido è praticamente impossibile anche con i moderni calcolatori, poiché dovremmo tener conto, contemporaneamente, del moto delle particelle circostanti con cui ciascuna di esse interagisce. Per questo motivo, ci si accontenta di una soluzione *globale* del problema, che fornisca informazioni sul moto *macroscopico* del sistema di particelle che costituiscono il fluido in esame.

Per iniziare la trattazione, introdurremo un’ipotesi semplificativa; supporremo di studiare un *fluido ideale*². Si tratta di un fluido praticamente incompressibile, le cui particelle si muovono *liberamente* le une rispetto alle altre, *con interazioni trascurabili*.

Ricordiamo alcune importanti definizioni; diremo che:

- *Un fluido è in **moto stazionario** quando la velocità della particella che passa per un certo punto nello spazio dipende solo dalla posizione e non*

¹ Per ulteriori dettagli sul progetto ed il suo sviluppo cfr. [1], [2] e [3].

² Si tratta, in realtà, di un’ipotesi molto forte, ma necessaria per studiare – almeno in prima approssimazione – con strumenti matematici piuttosto semplici il comportamento dei fluidi in assenza di turbolenze.

dall'istante in cui la si rileva. Inoltre, per un fluido ideale che scorra in un condotto, si fa l'ipotesi che la velocità delle particelle assuma lo stesso valore in tutti i punti di una sezione del condotto ortogonale alla velocità delle particelle.

- Una **linea di corrente** è una linea geometrica che è tangente al vettore velocità di una singola particella di fluido, di cui rappresenta la traiettoria. Due distinte linee di corrente non si possono intersecare; se ciò accadesse, infatti, nel punto comune alle due traiettorie la velocità della particella avrebbe due direzioni distinte e, in alcuni casi, anche due valori distinti. Per aiutarci a fissare le idee possiamo pensare che il moto di una foglia su un ruscello evidenzia una linea di corrente.
- Un **tubo di flusso** è un fascio di linee di corrente. Dal momento che le linee di corrente non si intersecano, in condizioni ideali il fluido che scorre in un tubo di flusso non si può mescolare con quello che scorre all'esterno. Per farsi un'immagine mentale di cosa sia un tubo di flusso è sufficiente pensare all'acqua che esce da un rubinetto.
- La **portata** di un condotto è il volume di fluido che attraversa la sezione del condotto nell'unità di tempo (vd. Fig 1a). Per determinare la portata ci basta osservare che il fluido che inizialmente si trovava sulla sezione S_1 nell'intervallo di tempo dt si è spostato sulla sezione S_2 , distante dx dalla precedente.

Il volume dV di fluido che attraversa la sezione S_1 del condotto nell'intervallo di tempo dt è pari, quindi, a quello del cilindro di base S_1 ed altezza dx . Dal momento che $v = \frac{dx}{dt}$ possiamo affermare che $dx = v dt$, da cui

$$dV = S dx = S \cdot v dt$$

e quindi la **portata** è espressa da

$$\frac{dV}{dt} = S \cdot v, \quad (1)$$

pari al prodotto tra la velocità del fluido e l'area della sezione del condotto stesso.

Se il fluido è incomprimibile e nel condotto non vi sono né pozzi né sorgenti, allora il volume di fluido che attraversa la sezione trasversale del condotto nell'unità di tempo è costante. In pratica, i due volumi evidenziati in Fig. 1 b sono uguali. Ne consegue che

$$S_1 \cdot x_1 = S_2 \cdot x_2$$

e, ricordando che

$$x_i = v_i \cdot \Delta t \quad \text{per } i = 1, 2$$

concludiamo che

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad (2)$$

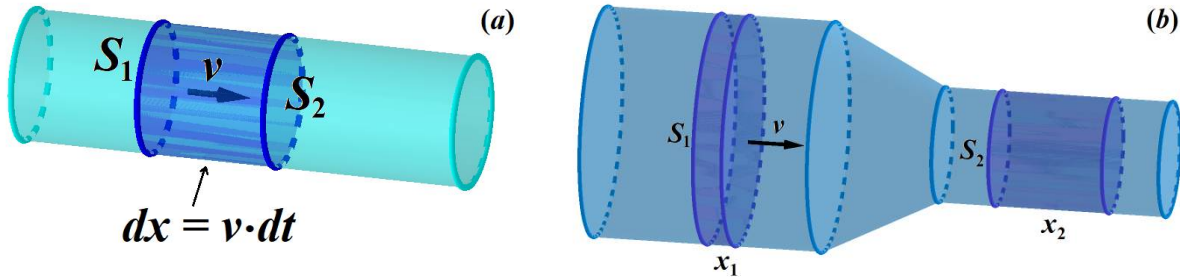


Fig. 1 – (a) La portata di un condotto, vista come volume di fluido che attraversa la sezione del condotto – (b) Rappresentazione dell’equazione di continuità: i due volumi evidenziati sono uguali

La (2) è detta **equazione di continuità della portata** ed afferma, in sostanza, che la velocità di un fluido incomprimibile in un condotto è inversamente proporzionale alla sezione del condotto stesso.

Questo spiega, ad esempio, il motivo per cui la sezione del tubo di flusso costituito dall’acqua che esce da un rubinetto si stringe man mano che l’acqua scende.

Un’altra proprietà importante della dinamica dei fluidi ideali è espressa dall’**equazione di Bernoulli**³:

Nel flusso stazionario di un fluido ideale di densità ρ , la pressione p del fluido e la sua velocità v verificano in ogni punto l’equazione

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{costante} \quad (3)$$

ove h rappresenta l’altezza del fluido nel punto considerato rispetto ad un prefissato livello di riferimento.

³ L’equazione di Bernoulli è, di fatto, un modo alternativo di esprimere il Principio di Conservazione dell’Energia Meccanica, nella sua forma più generale. Per una dimostrazione scritta usando una notazione liceale, vd. Appendice 1.

ESEMPI ED APPLICAZIONI IN AMBITO CARDIOLOGICO

In questa sezione esamineremo alcune semplici applicazioni della dinamica dei fluidi in ambito cardiologico. Per motivi di praticità, effettueremo le nostre stime considerando il sangue come un fluido ideale, nonostante abbia una viscosità non trascurabile ed il suo moto non sia affatto stazionario, se non in prima approssimazione.

STIMA DELLA VELOCITÀ DEL SANGUE NELL'AORTA DI UN UOMO ADULTO A RIPOSO

L'aorta di un uomo adulto può essere rappresentata schematicamente come un condotto cilindrico di raggio $r = 1\text{ cm}$; in base ai dati presenti in letteratura, la portata media del flusso ematico in un soggetto a riposo è di circa $5 \frac{\text{l}}{\text{min}}$.

Vogliamo stimare la velocità v con cui il sangue scorre nell'aorta.

Innanzitutto approssimiamo l'aorta ad un cilindro di raggio r ; la portata può essere espressa da:

$$P = \pi r^2 \cdot v,$$

quindi la velocità del sangue nell'aorta è:

$$v = \frac{P}{\pi r^2}$$

Cambiando unità di misura per la portata otteniamo:

$$P = 5 \frac{\text{l}}{\text{min}} = 5 \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} \approx 8.33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Pertanto:

$$v = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{8.33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi (10^{-2} \text{ m})^2} = \frac{8.33 \cdot 10^{-1} \text{ m}}{\pi \text{ s}} \approx 0.265 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 26.5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

STIMA DELLA SEZIONE TOTALE DELLE ARTERIE ALIMENTATE DALL'AORTA

La velocità media del sangue nelle arterie alimentate dall'aorta di un soggetto a riposo è di circa $v_{art} = 4.2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$; vogliamo stimare la sezione totale di tali arterie.

Per l'equazione di continuità, risulta:

$$S_{aorta} \cdot v_{aorta} = S_{art} \cdot v_{art}$$

da cui

$$S_{art} = \frac{S_{aorta} \cdot v_{aorta}}{v_{art}} = \frac{P_{aorta}}{v_{art}} = \frac{8.33 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}}{4.2 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}} \approx 2 \cdot 10^{-3} m^3$$

STIMA DELLA VELOCITÀ DEL SANGUE NEI VASI CAPILLARI

Com'è noto, i vasi capillari sono in numero altissimo ed hanno una sezione molto piccola; si stima che la superficie della "sezione effettiva" dei vasi capillari si un maschio adulto sia $S_{eff} \approx 0.25 m^2$. Utilizzando ancora una volta l'equazione di continuità otteniamo

$$S_{aorta} \cdot v_{aorta} = S_{eff} \cdot v_{capillari}$$

da cui

$$v_{capillari} = \frac{S_{aorta} \cdot v_{aorta}}{S_{eff}} = \frac{P_{aorta}}{S_{eff}} = \frac{8.33 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}}{0.25 m^2} \approx 33.32 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s} = 0.333 \frac{mm}{s}$$

Come si può notare, la velocità del flusso ematico a livello dei capillari è piuttosto bassa; questo permette che avvengano le reazioni chimiche che mediante le quali il sangue scambia con gli organi del corpo umano tutte le sostanze necessarie per la nostra vita.

L'ANEURISMA E LA STENOSI

Un *aneurisma* è una dilatazione, più o meno circoscritta, del diametro di un'arteria, dovuta all'alterazione anatomica della sua parete ed alla sollecitazione della pressione arteriosa. La sede più frequente dell'aneurisma è l'aorta, ed in particolare la sua porzione ascendente e l'arco.

La prognosi dell'aneurisma è piuttosto delicata, potendosi verificare la rottura della sacca aneurismatica, con conseguente morte rapidissima per emorragia.

Si chiama, invece, *stenosi* il restringimento di un vaso sanguigno che sia tale da ostacolare il normale transito del sangue.

A carico del sistema cardiovascolare, le stenosi possono verificarsi a livello degli orifizi valvolari cardiaci, delle arterie e delle vene.

Esaminiamo ora un paio di esempi che consentono di comprendere i pericoli derivanti dalla presenza di aneurismi e stenosi.

- *Supponiamo che, a causa di un aneurisma, la sezione S_1 di un'arteria aumenti del 50% e che la velocità del sangue, in una regione normale*

dell'arteria sia $v_1 = 20 \frac{cm}{s}$. Sapendo che la densità del sangue è $\rho = 1060 \frac{kg}{m^3}$, determiniamo la differenza tra la pressione p_2 e la pressione p_1 nella parte sana dell'arteria.

L'aumento del 50% della sezione dell'arteria può essere tradotto affermando che $S_2 = 1.5 \cdot S_1$. In base all'equazione di continuità allora:

$$S_1 \cdot v_1 = 1.5 \cdot S_1 \cdot v_2$$

da cui:

$$v_2 = \frac{2}{3} v_1 \approx 13.33 \frac{cm}{s}$$

Applicando l'equazione di Bernoulli⁴ (3) otteniamo:

$$p_1 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

da cui, semplificando:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Pertanto il gradiente pressorio è:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) \approx \frac{1}{2} \cdot 1060 \cdot (0.04 - 0.0178) \approx 11.77 Pa$$

Come si può notare, $\Delta p > 0$. Nell'aneurisma, quindi, l'accesso di pressione sottopone ad uno sforzo addizionale il tessuto dell'arteria già indebolito dalla patologia.

- *Supponiamo che, in una stenosi, la sezione dell'arteria diminuisca al 75% del valore normale. Sapendo che la velocità del sangue, in una regione normale dell'arteria è $v_1 = 20 \frac{cm}{s}$, determiniamo la differenza tra la pressione p_2 e la pressione p_1 nella parte sana dell'arteria.*

La riduzione al 75% della sezione dell'arteria può essere tradotta affermando che $S_2 = 0.75 \cdot S_1$. Applicando ancora una volta l'equazione di continuità:

$$S_1 \cdot v_1 = 0.75 \cdot S_1 \cdot v_2$$

da cui otteniamo:

$$v_2 = \frac{4}{3} v_1 \approx 26.67 \frac{cm}{s}$$

⁴ È ragionevole assumere che i due tratti di arteria siano praticamente alla stessa altezza h .

Utilizzando nuovamente l'equazione di Bernoulli, sempre nell'ipotesi che i due tratti di arteria siano alla stessa altezza (vd. nota 4), otteniamo:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) \approx \frac{1}{2} \cdot 1060 \cdot (0.04 - 0.0711) \approx -16.48 Pa$$

Come si può notare, in questo caso il gradiente pressorio è negativo. A monte della stenosi, quindi, si osserva l'ipertrofia della muscolatura parietale. Si tratta di un fenomeno compensatorio che tende ad aumentare la validità della propulsione del contenuto.

RELAZIONE TRA LA VELOCITÀ DEL FLUSSO EMATICO ED IL GRADIENTE PRESSORIO

Negli esempi precedenti, il gradiente pressorio calcolato mediante l'equazione di Bernoulli è espresso in *Pa*, mentre la pressione cardiaca viene normalmente calcolata in *mmHg*. Vogliamo determinare, ora, una semplice relazione tra la velocità del flusso ematico ed il gradiente pressorio (espresso in *mmHg*) in presenza di un aneurisma o di una stenosi.

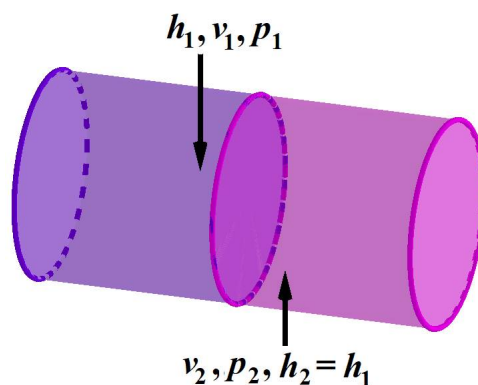


Fig. 2 – Determinazione della relazione tra velocità del flusso ematico e gradiente pressorio

Ancora una volta supporremo che l'altezza *h* dei due punti in cui si misura la velocità del flusso ematico sia praticamente la stessa.

Dall'equazione di Bernoulli, la relazione tra pressione sanguigna e velocità del flusso ematico è:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad (4)$$

ove la densità del sangue vale $\rho = 1060 \frac{kg}{m^3}$.

Pertanto:

$$\Delta p = 530(v_2^2 - v_1^2) Pa$$

Trasformando le unità di misura della pressione otteniamo:

$$1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

da cui:

$$1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$$

ed essendo $\frac{530}{133.3} \approx 4$, se esprimiamo la pressione ematica in *mmHg* otteniamo

la relazione semplificata:

$$\Delta p \approx 4(v_2^2 - v_1^2) \quad (5)$$

Assai di frequente la formula (5) viene utilizzata in situazioni in cui $v_1 \ll v_2$ e si semplifica ulteriormente. Otteniamo quindi la relazione, spesso usata in ecocardiografia per il calcolo dei gradienti pressori:

$$\Delta p \approx 4v_2^2 \quad (6)$$

LA STIMA ECOCARDIOGRAFICA DELLA PORTATA CARDIACA

Uno dei classici problemi che si incontrano in ecocardiografia è la stima della *portata cardiaca* (PC). Un primo approccio, che risulta abbastanza affidabile in assenza di insufficienza mitralica significativa, si basa sul calcolo della *gittata sistolica* (VS) come differenza tra il *volume telediastolico* (VTD) e quello *telesistolico* (VTS) del ventricolo sinistro⁵.

Indicata con FC la frequenza cardiaca, la portata cardiaca può essere facilmente calcolata moltiplicando la gittata sistolica per la frequenza cardiaca, cioè mediante la formula:

$$PC = (VTD - VTS) \cdot FC \quad (7)$$

Come si vede, questa formula è piuttosto semplice e può essere calcolata direttamente dalla strumentazione. Ciononostante il metodo più utilizzato per determinare la gittata sistolica è un altro e viene preferito al precedente poiché risulta affidabile anche in presenza di rigurgito mitralico; questo secondo approccio tiene conto anche del fatto che il sangue non è un fluido ideale.

Durante la sistole la velocità del flusso non è costante: più precisamente, dopo una brusca accelerazione, al termine della quale raggiunge la velocità massima, il getto ematico decelera gradualmente fino alla fine dell'eiezione.

L'andamento della velocità viene rilevato dall'ecocardiografo sfruttando l'effetto Doppler. L'area sotto il grafico della "curva Doppler" nel grafico veloci-

⁵ Ricordiamo che si chiama *sistole* la contrazione del miocardio e *diastole* il suo rilassamento. Il *volume telediastolico* è quindi il volume di sangue contenuto nel ventricolo sinistro nel momento della massima espansione e quello *telesistolico* rappresenta il volume di sangue che vi rimane nel momento della massima contrazione. Dalla loro differenza si riesce a determinare il volume ematico espulso (cioè la *gittata sistolica*).

tà/tempo (detta *integrale velocità/tempo*, VTI^6) viene interpretata come lo spazio percorso dal sangue espulso ad ogni contrazione. Nota la sezione di flusso S , ed assumendo che si mantenga costante nel tempo di calcolo di VTI , possiamo quindi calcolare VS come volume di un cilindro di base S ed altezza VTI :

$$VS = S \cdot VTI \quad (8)$$

Dobbiamo ricordare, però, che il sangue è un fluido viscoso e che l'attrito tra sangue e le pareti vascolari o tra particelle ematiche non è trascurabile; pertanto possiamo affermare che il sangue non fluisce attraverso vene ed arterie in modo stazionario. Più precisamente, la distribuzione delle velocità nello spazio definisce un profilo che dipende dalla geometria del vaso sanguigno o della camera cardiaca considerata e – in generale – è maggiore al centro dei vasi che alla periferia.

Per poter stimare la portata in modo affidabile è quindi necessario effettuare la misurazione in una regione in cui il moto possa essere considerato, con buona approssimazione, stazionario: nella pratica ecocardiografica la sezione S viene misurata a livello dell'orifizio della valvola aortica. Indicato con d il diametro dell'aorta, l'area della sezione S vale

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4},$$

pertanto la formula (8) diviene

$$VS = \pi \frac{d^2}{4} \cdot VTI \quad (9)$$

e quindi la portata cardiaca è data da

$$PC = \pi \frac{d^2}{4} \cdot VTI \cdot FC \quad (10)$$

Dal momento che la velocità del flusso è espressa in $\frac{cm}{s}$, la portata cardiaca PC viene espressa in $\frac{cm^3}{s}$ ed è facile convertirne il valore in litri al minuto ricordando che

$$1 \frac{cm^3}{s} = \frac{10^{-3} l}{60^{-1} min} = 6 \cdot 10^{-2} \frac{l}{min}$$

⁶ Dal momento che la funzione che esprime il grafico velocità/tempo non è nota a priori, VTI viene stimato dall'ecocardiografo sfruttando metodi di integrazione numerica (simili al noto "metodo dei rettangoli").

EFFETTO DOPPLER E STIMA DELLA VELOCITÀ DI FLUSSO EMATICO

In quest'ultimo paragrafo ricaveremo la formula utilizzata in ecocardiografia per determinare la velocità del flusso ematico mediante effetto Doppler.

Indicheremo con:

- v la *velocità di propagazione dell'onda*, ovvero la velocità con cui il fronte d'onda si propaga nel mezzo considerato;
- λ la *lunghezza d'onda*, ovvero la distanza tra due fronti d'onda successivi;
- T il *periodo*, ovvero il tempo necessario per un'oscillazione completa del mezzo di propagazione;
- $f = \frac{1}{T}$ la *frequenza*, ovvero il numero di oscillazioni per unità di tempo.

Chiaramente, se la sorgente S ed il ricevitore R sono fermi l'uno rispetto all'altro, il numero dei fronti d'onda percepiti da R nell'unità di tempo è pari a f . Nel seguito indicheremo, inoltre, con:

- f_0 la *frequenza di emissione*, legata alla frequenza di vibrazione di un cristallo piezoelettrico inserito nella sonda;
- θ l'angolo tra la direzione del flusso ematico e quella del fascio di ultrasuoni;
- $v_s = 1540 \frac{m}{s}$ la velocità degli ultrasuoni nei tessuti biologici.

Se la sorgente S è ferma ed il ricevitore si sta allontanando con velocità v , la variazione tra la frequenza percepita dal rilevatore e quella emessa è espressa da

$$\Delta f_1 = \frac{v \cos \theta}{\lambda} = \frac{v \cos \theta}{v_s} f_0 \quad (11)$$

mentre se la sorgente S si sta allontanando dal ricevitore R, la variazione tra la frequenza percepita dal rilevatore e quella emessa è espressa da⁷

$$\Delta f_2 = f_0 \cdot \frac{v \cos \theta}{v_s + v \cos \theta} \quad (12)$$

Nelle applicazioni ecocardiografiche dell'effetto Doppler sia la sorgente di ultrasuoni che il ricevitore sono fermi, essendo entrambi collocati all'interno della sonda. A provocare la variazione di frequenza sono in realtà le cellule ematiche, che si comportano in prima battuta come un ricevitore in moto ed in un secondo momento come una sorgente (di onde riflesse), ancora una volta in

⁷ Per una dimostrazione delle formule (11) e (12) si veda l'Appendice 2.

movimento, sempre con una velocità v dell'ordine di alcuni centimetri al secondo.

La variazione di frequenza rilevata dallo strumento è espressa, quindi, dalla somma di quelle definite dalle formule (11) e (12):

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta f_1 + \Delta f_2 = \frac{v \cos \theta}{v_s} f_0 + f_0 \cdot \frac{v \cos \theta}{v_s + v \cos \theta} = f_0 v \cos \theta \left(\frac{1}{v_s} + \frac{1}{v_s + v \cos \theta} \right) = \\ &= f_0 v \cos \theta \left(\frac{v_s + v \cos \theta + v_s}{v_s (v_s + v \cos \theta)} \right) = f_0 v \cos \theta \cdot \frac{2v_s + v \cos \theta}{v_s (v_s + v \cos \theta)}\end{aligned}$$

cioè

$$\Delta f = \frac{f_0 v \cos \theta}{v_s} \cdot \frac{2v_s + v \cos \theta}{v_s + v \cos \theta}$$

da cui

$$\frac{\Delta f}{f_0 \cos \theta} \cdot v_s = v \cdot \frac{2v_s + v \cos \theta}{v_s + v \cos \theta} \quad (13)$$

Dal momento che la velocità degli ultrasuoni nei tessuti biologici $\left(v_s = 1540 \frac{m}{s} \right)$

è molto superiore alla velocità v del flusso ematico, risulta $\frac{v}{v_s} \approx 0$. Quindi:

$$\frac{2v_s + v \cos \theta}{v_s + v \cos \theta} = \frac{\left(2 + \frac{v}{v_s} \cos \theta \right) v_s}{v_s \left(1 + \frac{v}{v_s} \cos \theta \right)} = \frac{2 + \frac{v}{v_s} \cos \theta}{1 + \frac{v}{v_s} \cos \theta} \approx 2 .$$

Pertanto la (13) diviene

$$\frac{\Delta f}{f_0 \cos \theta} \cdot v_s \approx 2v \quad (14)$$

da cui si ottiene la formula

$$v = \frac{\Delta f}{2f_0 \cos \theta} \cdot v_s \quad (15)$$

utilizzata in ecocardiografia per determinare la velocità del flusso ematico.

CONCLUSIONI

Non sempre gli studenti riescono a percepire l'importanza delle leggi fisiche che studiano dal punto di vista applicativo. Uno dei punti di forza dell'attività presentata in queste note è stato proprio questo. Molto probabilmente il percorso che abbiamo descritto è di livello più avanzato rispetto a ciò che viene inserito nella normale programmazione curricolare, ma può costituire un impor-

tante esempio di “didattica in contesto reale”, tanto in voga in quest’ultimo periodo, e fornisce ottimi spunti per un modulo interdisciplinare che coinvolga Fisica, Biologia, Matematica ed Informatica (negli indirizzi in cui viene studiata).

RINGRAZIAMENTI

Un doveroso ringraziamento va al collega Andrea Centomo che, nel 2008, mi ha coinvolto nel progetto PLS che stava coordinando, chiedendomi di sviluppare le tematiche che ho cercato di esporre in queste note. In fin dei conti se mi sono messo a scriverle è anche merito suo.

APPENDICE 1 – Dimostrazione dell'equazione di Bernoulli

Consideriamo un fluido ideale di densità ρ , cioè praticamente incompressibile, omogeneo e privo di attrito interno, in moto stazionario in un condotto. Introduciamo la seguente notazione, relativa alla fig. 4; indichiamo con:

- S_1 e S_2 due qualsiasi sezioni del condotto, poste – rispettivamente – ad altezze h_1 e h_2 rispetto ad un livello di riferimento prefissato;
- p_1 e p_2 i valori della pressione del fluido in corrispondenza delle sezioni S_1 e S_2 ;
- v_1 e v_2 i valori della velocità del fluido in corrispondenza delle sezioni S_1 e S_2 .

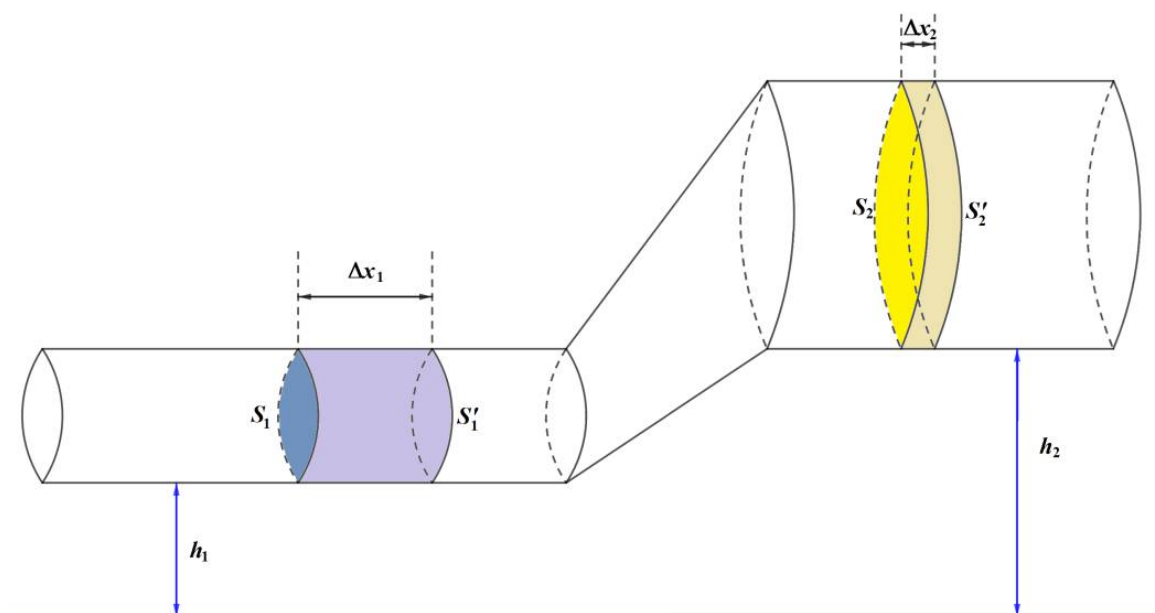


Fig. 4 – Il volume di fluido compreso tra le sezioni S_1 e S'_1 è uguale a quello compreso tra le sezioni S_2 e S'_2

Consideriamo il fluido inizialmente contenuto tra le sezioni S_1 e S_2 ; dopo un intervallo di tempo Δt il fluido si troverà tra le sezioni S'_1 e S'_2 . Dal momento che il fluido è incompressibile, il volume di fluido contenuto tra le sezioni S_1 e S'_1 è pari a quello contenuto tra le sezioni S_2 e S'_2 . Indicata con $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ la massa di fluido corrispondente, il lavoro complessivo compiuto sulla massa Δm è dovuto in parte alla forza peso ed in parte alla forza $F = p \cdot S$, legata alla pressione e diretta perpendicolarmente alla sezione S ; per il *teorema delle forze vive* possiamo scrivere:

$$L_{tot} = L_{press} + L_{peso} = \Delta E_c \quad (16)$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso (che è conservativa) è opposto alla variazione dell'energia potenziale gravitazionale:

$$L_{peso} = -\Delta U_g = \Delta mg(h_1 - h_2) = \Delta mgh_1 - \Delta mgh_2$$

Quanto al lavoro della "forza di pressione", osserviamo che:

- la forza $F_1 = p_1 S_1$ agisce sul fluido che attraversa la sezione S_1 , da sinistra verso destra;
- la forza $F_2 = p_2 S_2$ agisce sul fluido che attraversa la sezione S_2 , da destra verso sinistra.

Pertanto il lavoro da essa compiuto vale:

$$L_{press} = p_1 S_1 \Delta x_1 - p_2 S_2 \Delta x_2$$

Sostituendo nella (*) e ricordando l'espressione dell'energia cinetica otteniamo:

$$p_1 S_1 \Delta x_1 - p_2 S_2 \Delta x_2 + \Delta mgh_1 - \Delta mgh_2 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

da cui

$$p_1 S_1 \Delta x_1 + \Delta mgh_1 + \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = p_2 S_2 \Delta x_2 + \Delta mgh_2 + \frac{1}{2} \Delta m v_2^2$$

Ricordando che $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \cdot S_i \cdot \Delta x_i$, con $i = 1, 2$, possiamo scrivere:

$$p_1 \Delta V_1 + \rho \Delta V_1 g h_1 + \frac{1}{2} \rho \Delta V_1 v_1^2 = p_2 \Delta V_2 + \rho \Delta V_2 g h_2 + \frac{1}{2} \rho \Delta V_2 v_2^2$$

da cui otteniamo l'**equazione di Bernoulli**:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (17)$$

APPENDICE 2 – Dimostrazione delle formule generali dell'effetto Doppler

Vogliamo dimostrare le formule (11) e (12) utilizzate in precedenza. Analizziamo le due distinte situazioni.

CASO 1: Supponiamo innanzitutto che **la sorgente sia ferma ed il ricevitore sia in moto di allontanamento** con velocità v .

In queste ipotesi, il numero di fronti d'onda rilevati da R nell'unità di tempo (frequenza percepita) è inferiore a quello realmente emesso dalla sorgente. Infatti, l'osservatore percepirà un numero di fronti d'onda pari a quelli realmente emessi dalla sorgente, meno quelli che non riescono a raggiungerlo a causa del suo moto. Analizziamo in dettaglio i due casi presentati in fig. 5.

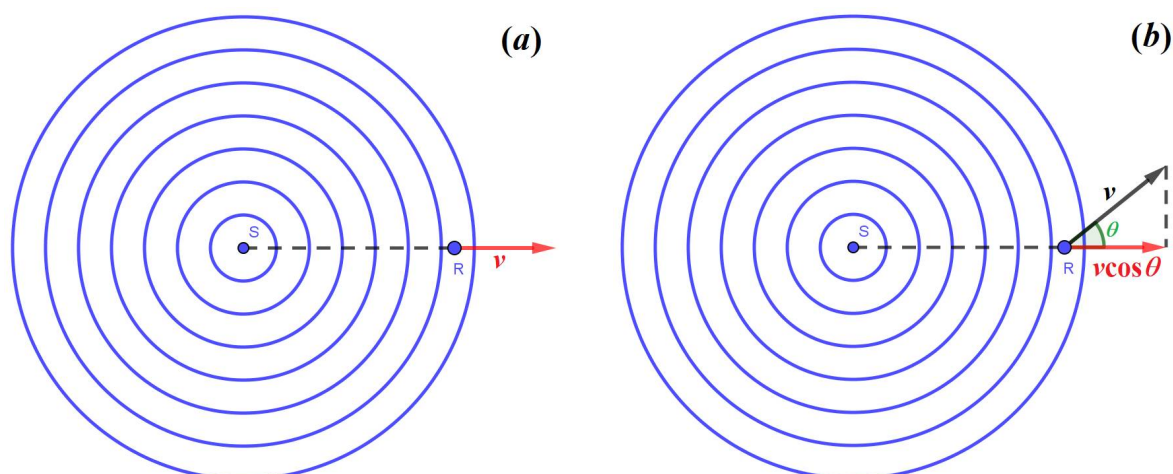


Fig. 5 – Descrizione effetto Doppler con sorgente ferma e ricevitore in allontanamento. (a) Moto radiale. (b) Moto in direzione non radiale.

- Se il moto di R è in direzione radiale (Fig. 5a), il numero dei fronti d'onda che R non riesce a rilevare nell'unità di tempo è pari al rapporto $\frac{v}{\lambda}$; pertanto la frequenza percepita da R è

$$f' = f_0 - \frac{v}{\lambda},$$

in base alle leggi di composizione classica delle velocità, quindi la differenza tra la frequenza emessa e quella percepita vale

$$\Delta f = f_0 - f' = \frac{v}{\lambda} \quad (18)$$

- Se il moto di R è in direzione non radiale (Fig. 5b), possiamo ripetere il ragionamento precedente, avendo l'accortezza di utilizzare in luogo di v la sua proiezione in direzione radiale ($v \cos \theta$). In tal caso otteniamo:

$$\Delta f = \frac{v \cos \theta}{\lambda}$$

e, ricordando che, per definizione di lunghezza d'onda, risulta $\lambda = \frac{v_s}{f_0}$:

$$\Delta f_1 = \frac{v \cos \theta}{v_s} \cdot f_0,$$

che è la (11).

CASO 2: Supponiamo che **la sorgente si stia allontanando** con velocità v ed **il ricevitore sia fermo**.

In questo caso, la lunghezza d'onda rilevata sarà maggiore di quella emessa. Analizziamo in dettaglio i due casi presentati in fig. 6.

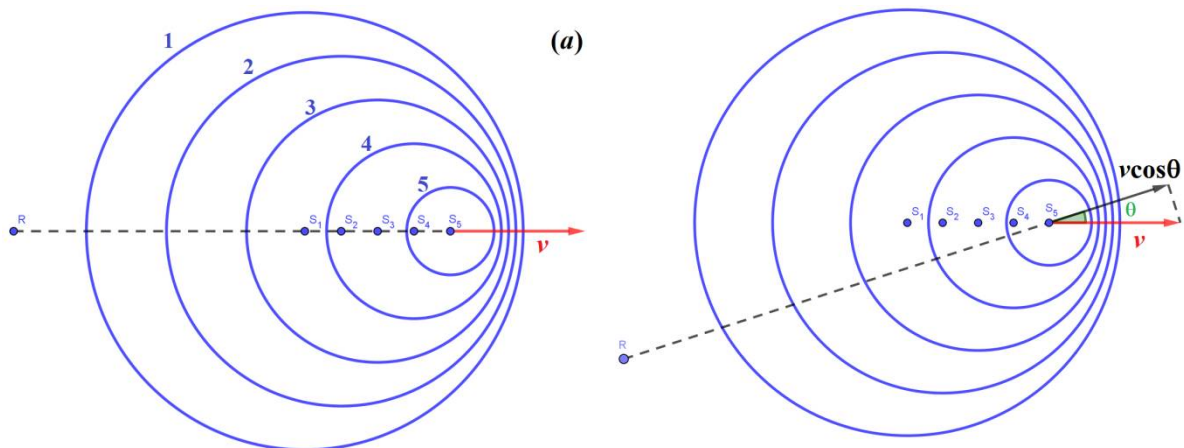


Fig. 6 – Descrizione effetto Doppler con ricevitore fermo e sorgente in allontanamento. (a) Moto radiale. (b) Moto in direzione non radiale.

- Innanzitutto supponiamo che la sorgente si allontani in direzione radiale (fig. 6a). Immaginiamo che all'istante $t = 0s$ la sorgente emetta un massimo; in un periodo $T = \frac{1}{f_0}$ questo massimo avrà percorso una distanza pari alla lunghezza d'onda $\lambda = v_s \cdot T = \frac{v_s}{f_0}$. Nello stesso intervallo di tempo, la

sorgente si è allontanata di un tratto pari a $\frac{v}{f_0}$. Pertanto la lunghezza d'onda rilevata è:

$$\lambda' = \frac{v_s}{f_0} + \frac{v}{f_0} = \frac{v_s + v}{f_0}.$$

A questa nuova lunghezza d'onda corrisponde la frequenza rilevata, definita mediante la formula $\lambda' = \frac{v_s}{f'}$; pertanto otteniamo:

$$f' = \frac{v_s}{\lambda'} = \frac{v_s}{v_s + v} f_0 \quad (19)$$

- Supponiamo ora che la sorgente si allontani in direzione non radiale (fig. 6b). In questo caso, il numero di fronti d'onda percepiti da R nell'unità di tempo è lo stesso che percepirebbe se il moto di S fosse radiale con velocità $v \cos \theta$. Ci basterà quindi sostituire v con $v \cos \theta$ nella (19) per ottenere:

$$f' = \frac{v_s}{v_s + v \cos \theta} f_0$$

da cui, con un po' di pazienza, otteniamo la (12). Infatti, la variazione della frequenza percepita vale, in questo caso:

$$\Delta f_2 = f_0 - \frac{v_s}{v_s + v \cos \theta} f_0 = \frac{v_s + v \cos \theta - v_s}{v_s + v \cos \theta} f_0 = \frac{v \cos \theta}{v_s + v \cos \theta} f_0$$

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- [1] A. Centomo, L. Meneghini, *“Dinamica dei fluidi ed Ecocardiografia”*
http://www.webalice.it/andrea.centomo/Ecocardiografia/Dinamica_fluidi.pdf
- [2] A. Centomo, *“Matematica e Ecocardiografia. Un primo approccio al C++”*
<http://docplayer.it/2187968-Matematica-e-ecocardiografia.html>
- [3] Progetto Lauree Scientifiche – Matematica, *“Matematica ed ecocardiografia 2D”*
http://www.webalice.it/andrea.centomo/Ecocardiografia/Relazione_PLS.pdf
- [4] P. Tipler, *“Invito alla fisica”*, Zanichelli Ed., Bologna (2000)
- [5] http://www.uniroma2.it/didattica/FISICA/deposito/6_CIRCOLAZIONE_DEL_SANGUE.pdf
- [6] <http://www.echocardio.eu/stima-della-portata.html>
- [7] http://www.botonimarco.it/files/letteratura_volume_e_funzione_sistolica_vsx.pdf
- [8] http://www.giornaledicardiologia.it/allegati/00802_2000_10/fulltext/10-00_12%201334-1338.pdf
- [9] www.dsnm.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid726587.ppt