Uno sguardo sull'iperbole

Lorenzo Meneghini

Com'è noto, l'iperbole è una curva ottenuta dalla sezione di un cono indefinito di apertura α con un piano che forma un angolo $\beta < \alpha$ con l'asse del cono (vd. fig. 1).

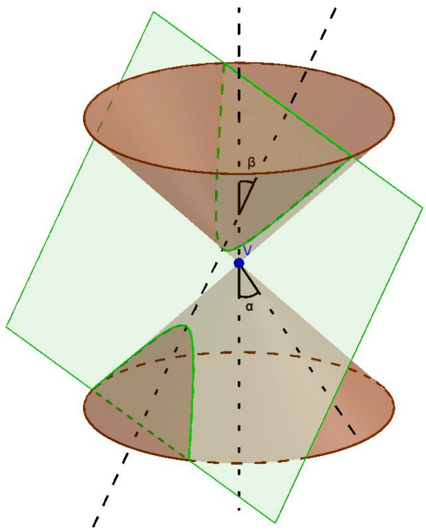

Fig. 1 – Iperbole come sezione del cono

In queste note ci proponiamo di esplorare alcune proprietà dell'iperbole, cercando di metterne in risalto gli aspetti legati alla geometria sintetica ed all'ottica, senza dimenticare alcune osservazioni di tipo analitico che non sempre vengono presentate durante la scuola superiore.
Iniziamo ricordando anche che l'iperbole può essere definita come

> *il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il modulo della differenza delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti fuochi.*

L'iperbole costruita con riga e compasso

Presentiamo ora la costruzione geometrica dell'iperbole, ottenuta con metodi geometrici elementari. Innanzitutto fissiamo due punti F_1 e F_2 nel piano e costruiamo la circonferenza di centro F_1 e raggio $r > \frac{F_1F_2}{2}$. Fissato un arbitrario

punto A sulla circonferenza, tracciamo, poi, la retta AF_1 ed intersechiamola con l'asse del segmento F_1F_2 ottenendo il punto P (fig. 2).
Si dimostra facilmente che P appartiene al grafico di un'iperbole avente fuochi F_1 e F_2; infatti, per le proprietà dell'asse risulta $AP = PF_2$ e quindi:

$$F_1P - F_2P = F_1P - AP = r$$

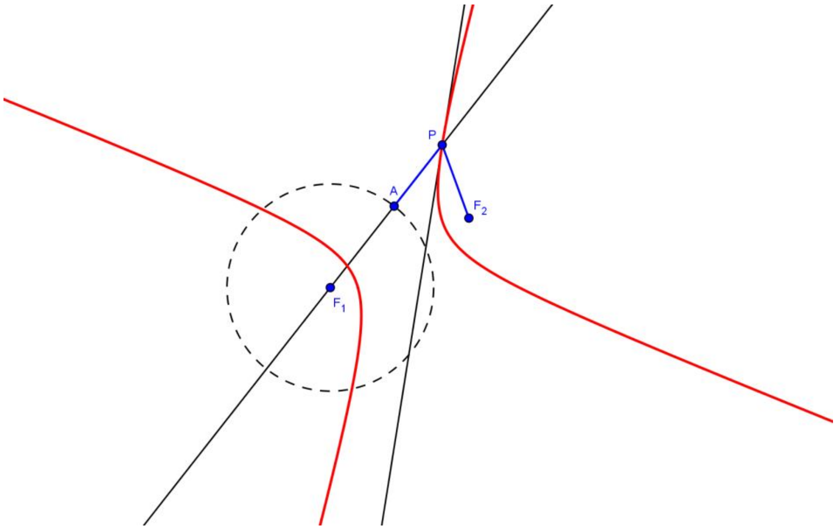

Fig. 2 – Costruzione dell'iperbole per via sintetica

È facile osservare che la curva così costruita ammette due assi di simmetria tra loro ortogonali; si tratta della retta F_1F_2 (fig. 3*a*) e dell'asse del segmento F_1F_2 (fig. 3*b*).

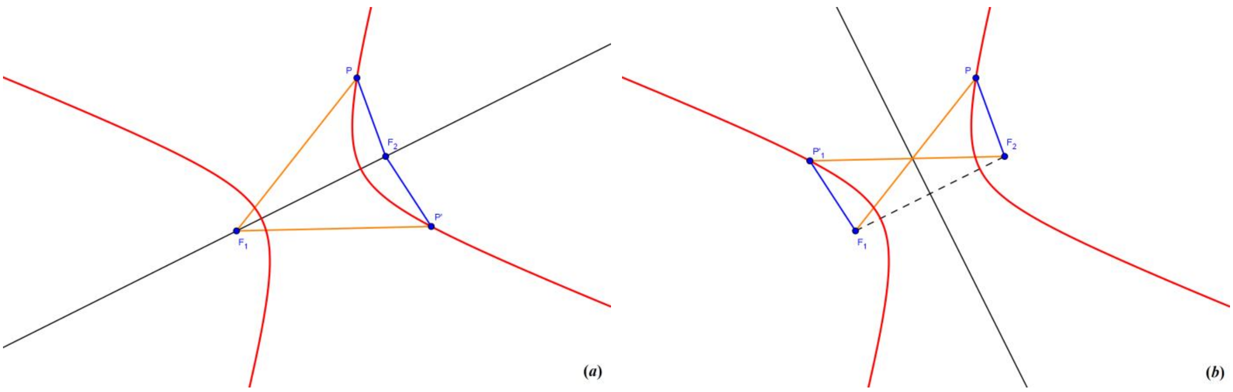

Fig. 3 – Assi di simmetria di un'iperbole

La dimostrazione (piuttosto semplice) è basata sulla congruenza dei triangoli PF_1F_2 e $P'F_1F_2$ e viene lasciata come esercizio al lettore. Com'è noto dalla geometria elementare, poi, se una curva ammette due assi di simmetria tra loro ortogonali, il loro punto di intersezione è il suo centro di simmetria. Abbiamo quindi ottenuto, in modo piuttosto semplice e per via sintetica, alcune delle proprietà dell'iperbole note dalla geometria analitica.

Proprietà "ottiche" dell'iperbole

Sulla base di quanto fin qui osservato si riesce a dimostrare facilmente la

PROPOSIZIONE 1

Le rette che congiungono un qualsiasi punto P di un'iperbole con i due fuochi hanno come bisettrici la tangente e la normale[1] *alla curva in P.*

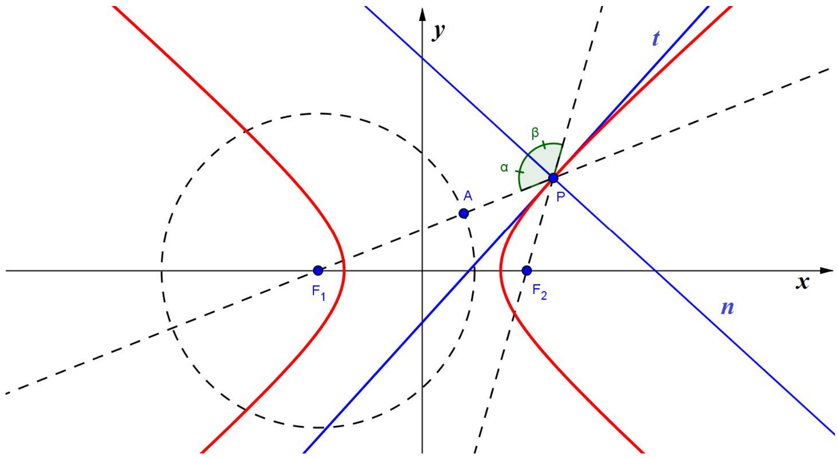

Fig. 3 – Normale e tangente all'iperbole in P

Per dimostrare la proposizione osserviamo che – per costruzione – la tangente t è anche l'asse del segmento AF_2, che coincide con la bisettrice dell'angolo $\widehat{APF_2}$.

Per le proprietà delle bisettrici, la normale n alla curva in P è la bisettrice della coppia di angoli adiacenti ad $\widehat{APF_2}$.

❑

È piuttosto agevole verificare, sulla base della proposizione appena dimostrata, le cosiddette *proprietà ottiche dell'iperbole*, espresse dalla

PROPOSIZIONE 2

Supponiamo di avere uno specchio di forma iperbolica, e poniamo una sorgente luminosa in uno dei due fuochi. Allora i raggi vengono riflessi lungo una traiettoria ottenuta congiungendo l'altro fuoco con il punto di riflessione, si comportano cioè come se provenissero dall'altro fuoco.

---

[1] Ricordiamo che si chiama *"normale"* ad una curva nel punto P la retta passante per P e perpendicolare alla tangente in P.

In base alla proposizione 1, infatti, gli angoli α e β sono uguali e rappresentano – rispettivamente – l'angolo di incidenza e quello di riflessione del raggio che esce dal fuoco F_1 rispetto allo *specchio iperbolico* (fig. 4).

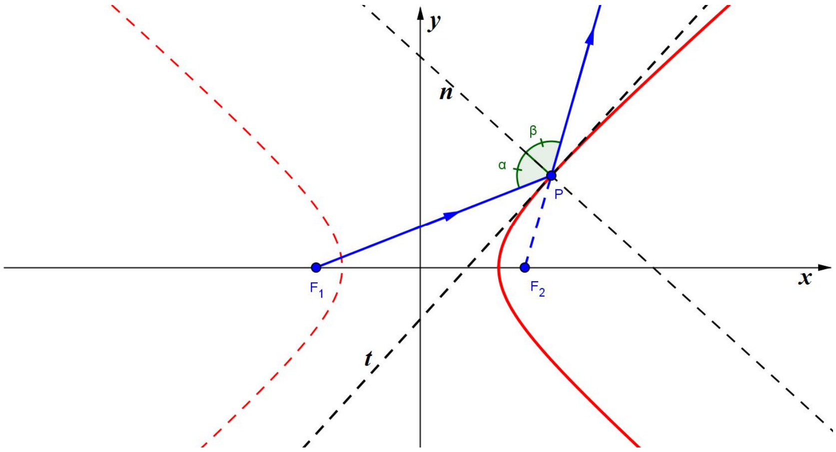

Fig. 4 – Proprietà "ottiche" dell'iperbole

Una proprietà delle tangenti all'iperbole

Passiamo, ora, ad analizzare – usando un approccio "analitico" – un'altra interessante proprietà dell'iperbole. Studieremo, innanzitutto, un caso particolare che verrà successivamente generalizzato.

Consideriamo l'iperbole equilatera di equazione $xy=1$ ed un suo punto di coordinate $P\left(a,\frac{1}{a}\right)$; possiamo supporre, per fissare le idee, che $a>0$. La tangente in P all'iperbole ha un'equazione del tipo $y-\frac{1}{a}=m(x-a)$, il cui coefficiente angolare va determinato in modo che la retta e la curva abbiano un punto di contatto doppio. Mettendo a sistema le due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} xy=1 \\ y-\frac{1}{a}=m(x-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y-\frac{1}{a}=m(x-a) \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=m(x-a) \Leftrightarrow \frac{a-x}{ax}=m(x-a) \Leftrightarrow m(x-a)+\frac{x-a}{ax}=0 \Leftrightarrow (x-a)(axm+1)=0$$

Dal momento che la tangente ha un punto di contatto doppio con la retta in P è necessario che l'equazione precedente ammetta due soluzioni coincidenti; pertanto dev'essere $a^2m+1=0$, cioè:

$$m=-\frac{1}{a^2}$$

Sostituendo nell'equazione della retta otteniamo

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$$

Intersecando la tangente con gli assi cartesiani (asintoti dell'iperbole) troviamo i punti $A\left(0,\frac{2}{a}\right)$ e $B(2a,0)$ che, assieme all'origine, formano un triangolo rettangolo AOB (fig. 5).

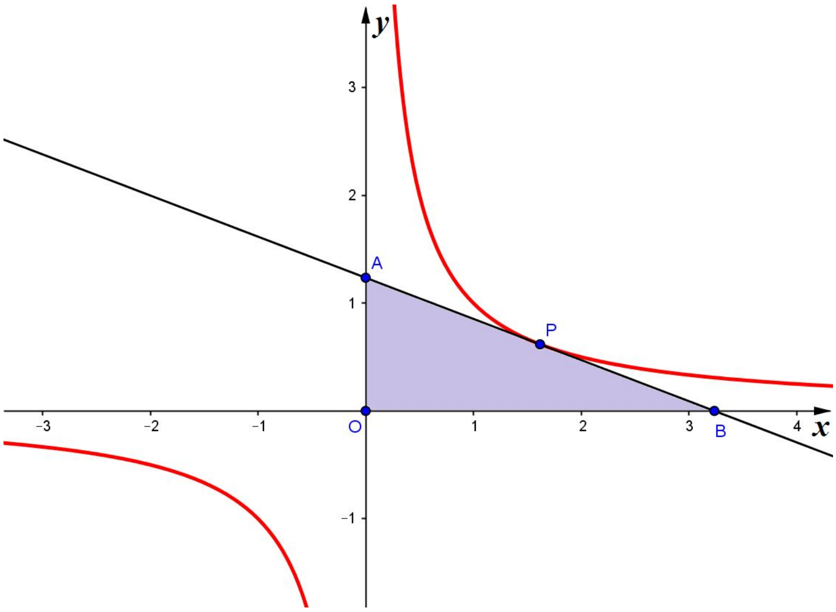

Fig. 5 – Triangolo formato dalla tangente all'iperbole e dai suoi asintoti

Dal momento che abbiamo supposto $a>0$, le misure dei cateti del triangolo sono rispettivamente $OA=\frac{2}{a}$ e $OB=2a$. L'area del triangolo vale, pertanto:

$$Area(AOB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a}\cdot 2a=2u^2$$

Abbiamo, quindi, dimostrato – in questo caso particolare – che:

> *L'area del triangolo delimitato dagli asintoti e da una tangente all'iperbole in un suo punto P è indipendente dal punto di tangenza.*

A questo punto è spontaneo domandarsi se questa proprietà sia comune ad ogni iperbole o se valga solo per quella scelta. Per rispondere a questa domanda, consideriamo l'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=y \end{cases}$$

ove k rappresenta un numero reale non nullo. La matrice dell'affinità è $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; il modulo del suo determinante, che vale appunto $|k|$, rappresenta il rapporto tra le aree di figure corrispondenti nell'affinità.

Applicando questa trasformazione otteniamo $x'y' = kxy = k$, cioè la nuova iperbole di equazione $xy = k$, eliminando gli apici.
Queste osservazioni ci consentono di estendere il risultato ottenuto a tutte le iperboli equilatere riferite ai propri asintoti e, di conseguenza, ad ogni iperbole equilatera. Infatti, la rotazione che trasforma la curva di equazione $xy = k$ in $x^2 - y^2 = p^2$ è un'isometria (e quindi conserva le aree).

Se, infine, l'iperbole non fosse equilatera non dovremmo preoccuparci, dal momento che è abbastanza semplice osservare che l'affinità

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{a} \\ y' = \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

fa corrispondere la curva[2] $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a $x^2 - y^2 = 1$.
Possiamo pertanto affermare di aver dimostrato la

PROPOSIZIONE 3
L'area del triangolo delimitato dagli asintoti di un'iperbole e da una qualsiasi delle sue tangenti è indipendente dalla scelta del punto di tangenza.

Una curiosa proprietà dell'iperbole equilatera

Per concludere questa panoramica, consideriamo ancora una volta un'iperbole equilatera.

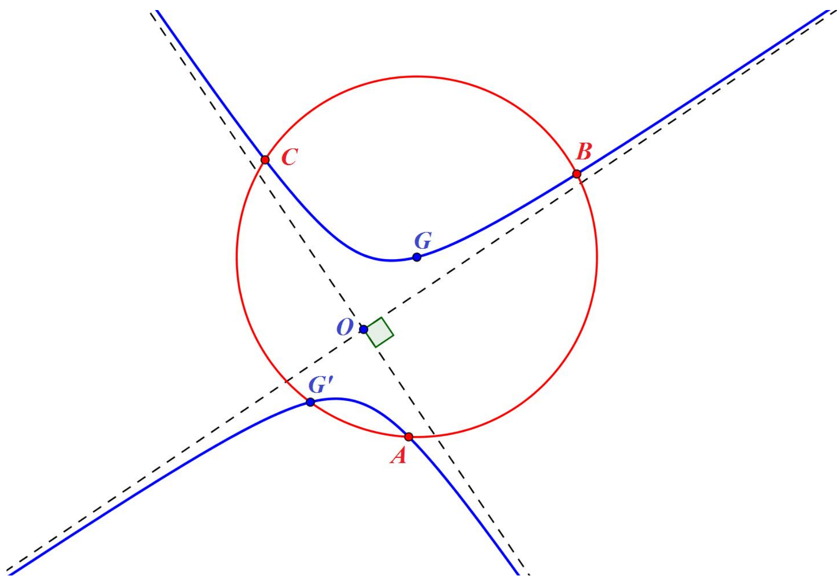

Fig. 6 – Iperbole equilatera e circonferenza di centro G e raggio 2OG

[2] Nel caso in cui l'iperbole avesse i fuochi sull'asse *y*, ci basterebbe applicare anche una simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (essendo un'isometria conserva le aree).

Scelto arbitrariamente un punto G su uno dei due rami della curva, costruiamo la circonferenza di centro G e raggio pari al doppio della distanza tra G ed il centro O della conica.
Dal momento che O è il centro di simmetria dell'iperbole possiamo concludere che il punto G', simmetrico di G rispetto ad O, appartiene alla circonferenza (vd. fig. 6).
Inoltre l'iperbole è una conica illimitata; pertanto, il ramo dell'iperbole che contiene il centro della circonferenza la intersecherà in due punti distinti (indicati con A e B in fig. 6).
Per dimostrare che le due curve hanno, in generale, anche un'altra intersezione dobbiamo introdurre un opportuno sistema di riferimento cartesiano (se ne può scegliere uno in cui l'iperbole abbia equazione $xy=1$) e ragionare dal punto di vista analitico.

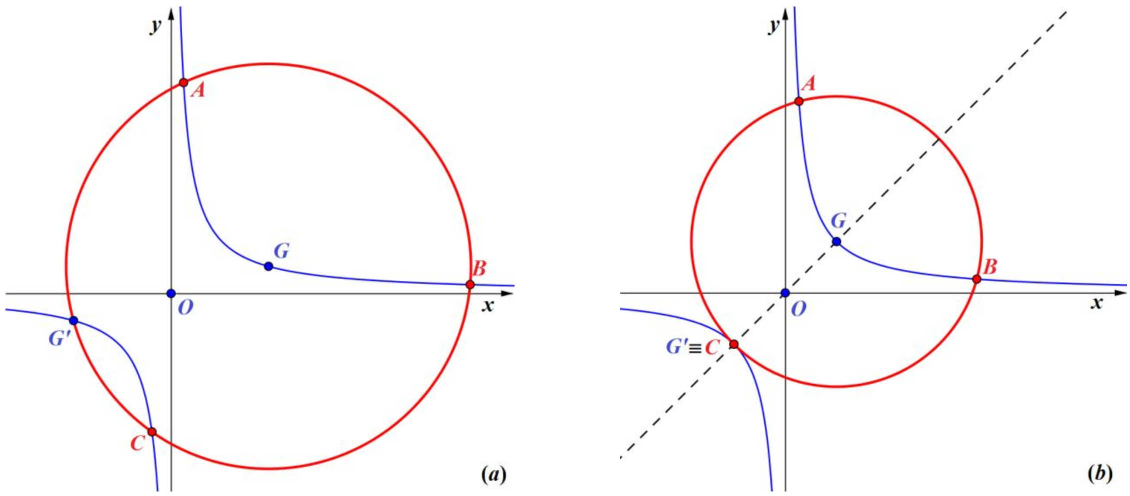

Fig. 7 – (*a*) Iperbole equilatera e circonferenza di centro G e raggio 2OG
(*b*) Il centro G appartiene alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

In base alla scelta effettuata, possiamo affermare che $G\left(g,\frac{1}{g}\right)$, con $g>0$. In tal caso la circonferenza ha equazione:

$$(x-g)^2+\left(y-\frac{1}{g}\right)^2=4\left(g^2+\frac{1}{g^2}\right)$$

che, una volta semplificata, può essere riscritta così:

$$x^2+y^2-2gx-\frac{2}{g}y-3\left(g^2+\frac{1}{g^2}\right)=0$$

Per determinare le intersezioni tra le due curve occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-2gx-\dfrac{2}{g}y-3\left(g^2+\dfrac{1}{g^2}\right)=0 \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2gx-\frac{2}{g}\cdot\frac{1}{x}-3\frac{g^4+1}{g^2}=0$$

cioè:

$$g^2x^4-2g^3x^3-3\left(g^4+1\right)x^2-2gx+g^2=0 \qquad (1)$$

Si tratta di un'equazione algebrica di 4° grado, a coefficienti reali; in base alle osservazioni precedenti, possiamo concludere che l'equazione ha almeno tre radici reali. Applicando il Teorema Fondamentale dell'Algebra è facile, a questo punto, concludere che in realtà l'equazione precedente ammette sempre quattro radici reali (fig. 7*a*), di cui almeno tre sono distinte[3].

Dalle osservazioni precedenti possiamo dedurre che $-g$ è una delle soluzioni dell'equazione data; pertanto il polinomio a primo membro è divisibile per $x+g$. Applicando il metodo di Ruffini possiamo riscrivere l'equazione (1):

$$\begin{array}{c|cccc|c} & g^2 & -2g^3 & -3g^4-3 & -2g & g^2 \\ -g & & -g^3 & 3g^4 & 3g & -g^2 \\ \hline & g^2 & -3g^3 & -3 & g & 0 \end{array}$$

$$(x+g)\left(g^2x^3-3g^3x^2-3x+g\right)=0$$

ed affermare che la

$$g^2x^3-3g^3x^2-3x+g=0 \qquad (2)$$

fornisce le ascisse dei punti A, B e C in fig. 8.

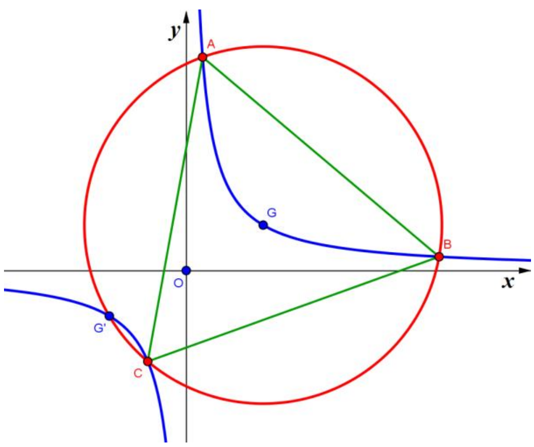

Fig. 8 – Iperbole equilatera, circonferenza e triangolo ABC

[3] Nel caso in cui G appartenga alla bisettrice del I e III quadrante, si dimostra facilmente che le due intersezioni della circonferenza con il ramo d'iperbole che non contiene G sono coincidenti (fig. 7b).

Dal momento che, per ipotesi, $g>0$, possiamo riscrivere la (2) in questo modo:

$$x^3-3gx^2-\frac{3}{g^2}x+\frac{1}{g}=0 \tag{3}$$

Applicando le formule di Viète (cfr. Appendice), dalla (3) otteniamo:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-(-3g)=3g \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-\dfrac{3}{g^2} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{1}{g} \end{cases} \tag{4}$$

A questo punto possiamo dimostrare la

PROPOSIZIONE 4

Il triangolo ABC è equilatero[4].

DIM.

Per dimostrare che il triangolo ABC è equilatero è sufficiente provare che il baricentro del triangolo coincide col suo circocentro G (cfr. Appendice).

Consideriamo i punti di intersezione tra le due coniche, diversi da G'; le loro coordinate sono $A\left(a,\frac{1}{a}\right)$, $B\left(b,\frac{1}{b}\right)$ e $C\left(c,\frac{1}{c}\right)$, ove a,b e c risolvono la (2).

Determiniamo il baricentro del triangolo ABC, utilizzando le formule (4):

- l'ascissa del baricentro è

$$x=\frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{1}{3}(3g)=g$$

- l'ordinata del baricentro è

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{3}{g^2}}{-\frac{1}{g}}=\frac{1}{g}$$

Abbiamo dimostrato, per via analitica, che il baricentro del triangolo coincide con il centro della circonferenza ad esso circoscritta (cioè col circocentro). Pertanto il triangolo ABC è equilatero.

❑

[4] Mentre cercavo idee per costruire problemi sulle coniche mi sono imbattuto nel post che si può trovare in [6]; incuriosito ho cercato dapprima una soluzione per via puramente sintetica, per approdare dopo un'attenta riflessione, allo sviluppo che ho presentato in queste note, sostanzialmente identico a quello presentato in [6], ma ottenuto autonomamente. Probabilmente esiste anche una dimostrazione "puramente sintetica" di questo fatto, ma non sono ancora riuscito a trovarla.

Conclusioni

Abbiamo dimostrato alcune interessanti proprietà dell'iperbole, ricorrendo all'occorrenza sia all'approccio sintetico che a quello analitico, cercando di adoperare di volta in volta gli strumenti più semplici possibili, nel tentativo di rendere questo articolo comprensibile anche agli studenti più giovani. Non riuscendo a trovare argomentazioni più semplici, poi, per dimostrare la Proposizione 4 abbiamo fatto ricorso anche a strumenti (come le conseguenze del Teorema Fondamentale dell'Algebra) più sofisticati di quelli normalmente conosciuti dagli studenti liceali, nella speranza di indurre comunque un po' di curiosità nel lettore.

Concludendo, riteniamo che la maggior parte dei risultati sviluppati in queste note siano sviluppabili in classe durante il normale percorso liceale, sia nella fase iniziale in cui viene introdotta l'iperbole come sezione conica che in un momento successivo, magari costruendo opportuni esercizi da somministrare agli studenti per stimolare la discussione.

Il fatto di ritornare più volte sull'argomento, realizzando di fatto quel percorso a spirale descritto da Comenio nella *Didactica Magna* e successivamente ripreso da Jerome Bruner, consente di avere il tempo per lasciar sedimentare i concetti per una comprensione più profonda da parte dei ragazzi.

Bibliografia e Sitografia

[1] R. Ferrauto, *Il problema geometrico e la geometria analitica*, Dante Alighieri Ed. (1984)

[2] B. Cavallaro, *L'iperbole come luogo di punti*, Treccani Scuola (http://www.treccani.it/portale/opencms/Portale/resources/multimedia/lezioni_matematica/iperbole/Iperbole_Presenta1.pdf)

[3] M. Bramanti, *Appunti sulle coniche*, (2004) (http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/corsi/archivio_pdf/coniche.pdf)

[4] J. D'Aurizio, *Problemi di costruzione con riga e compasso. Un approccio orientato alla didattica.* (2008) (http://poisson.phc.unipi.it/~daurizio/Dida1.pdf)

[5] N. Sansonetto, *Sezioni coniche: approccio sintetico.* (2009) (http://www.di.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid109077.pdf)

[6] https://www.matematicamente.it/forum/post64707.html

APPENDICE

Per completezza di trattazione, riportiamo alcune osservazioni utili nelle dimostrazioni precedenti.

a) In base alla legge di annullamento del prodotto, il polinomio $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ ammette gli zeri α, β e γ. Moltiplicando tra loro i binomi otteniamo:

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=0 \qquad (*)$$

La generica equazione di 3° grado può essere espressa così:

$$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad (**)$$

Confrontando il primo membro della (*) con quello della (**) ed applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo le note *formule di Viète*:

$$\begin{cases} a_2=-(\alpha+\beta+\gamma) \\ a_1=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \\ a_0=-\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

b) *Se in un triangolo il baricentro coincide con il circocentro, allora il triangolo è equilatero.*

Se, infatti, G è baricentro del triangolo ABC, allora la retta CG è mediana del lato AB e passa per il punto medio M di AB.

Se, inoltre, G è circocentro di ABC, allora la retta GM è asse del segmento AB e passa per C. Per le proprietà dell'asse concludiamo che AC ≅ BC. Ripetendo il ragionamento rispetto al lato BC concludiamo che AB ≅ BC. Pertanto il triangolo ABC è equilatero.