GIOCARE CON I GRAFICI

Elena Stante

Fra tutte le discipline la Geometria è senza dubbio uno delle più complesse : essa infatti costituisce , fin dal primo anno di liceo , il primo momento educativo all'osservazione precisa e all'enunciazione esatta, con un primo tentativo di descrivere il mondo che ci circonda.
Spesso però , il carattere formativo della geometria viene piuttosto trascurato : in particolare l'insegnamento della geometria analitica deve avere il suo ruolo nella formazione degli allievi e occorre evitare che essa diventi un ammasso di formule da applicare nella risoluzione di problemi.
L'attività è un frammento di un percorso didattico inteso a stimolare la curiosità e la creatività degli studenti nell'indagare sulle rappresentazioni di curve algebriche, coinvolgendoli in una ricerca che possa condurre alla scoperta di qualche proprietà attraverso l'utilizzo del mezzo informatico.

LE CUBICHE DI NEWTON

La classificazione delle cubiche effettuata da Newton compare nell'opera "*Lexicon Technicum"* di John Harris (Londra , 1710) .

Queste curve hanno equazione del tipo :

$$y^2 = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \qquad (*)$$

Newton sostenne che un'equazione di questo tipo : "*definisce una parabola le cui gambe divergono tra loro , e vanno all'infinito in modi opposti ".*
Egli inoltre riconobbe cinque specie diverse di cubiche , in relazione alle radici dell'equazione di terzo grado al secondo membro della (*) :

Indicate con x_1, x_2, x_3 le radici dell'equazione : $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$, disposte in ordine di valore crescente , e supposto *a* > 0 , si possono presentare i seguenti casi :

1) se le radici sono reali e distinte ; si ha allora una parabola cubica con ovale ;
" …la Figura è una parabola divergente a Forma di campana , con una Ovale ai suoi vertici "

2,3) se due delle radici coincidono ; si ha allora una parabola cubica annodata se $x_2 = x_3$, puntata se $x_1 = x_2$;
"… si formerà una Parabola, o Nodata toccante una Ovale, oppure a Punto , avente l'Ovale infinitamente piccola "

4) se le tre radici coincidono , $x_1 = x_2 = x_3$ si ha una parabola cubica cuspidata ;
" …questa è la Parabola Neiliana , comunemente chiamata semicubica"

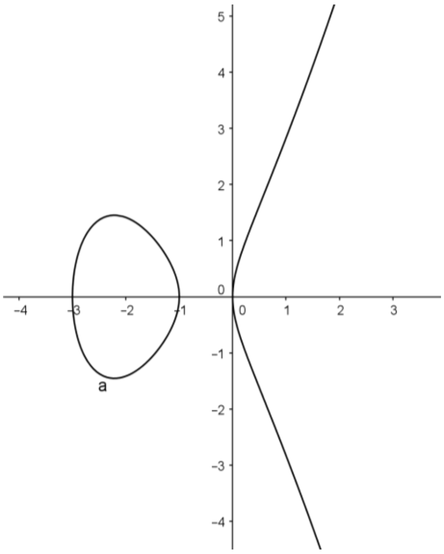
5) se due delle radici sono immaginarie si ha una parabola cubica campaniforme .
“ se le due radici sono impossibili, si avrà una Parabola Pura , a forma di Campana “

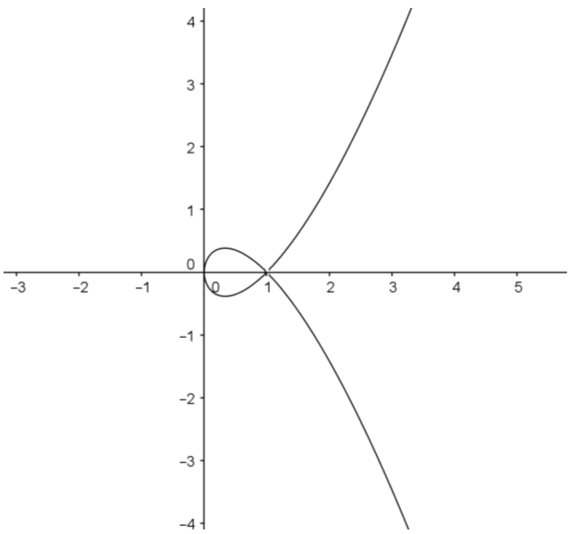
Con l’ausilio del software Derive , tracciamo alcune cubiche di Newton .

Supponendo , per semplicità , che sia $d = 0$ ed $a > 0$ nella (*) , questa si può scrivere nella forma :

$$y^2 = a \cdot x \cdot \left(x^2 + b \cdot x + c\right) \qquad (**)$$

I)Le radici del secondo membro di questa equazione ,uguagliato a zero , sono una nulla e le altre due reali e distinte se $b^2 - 4 \cdot c > 0$:



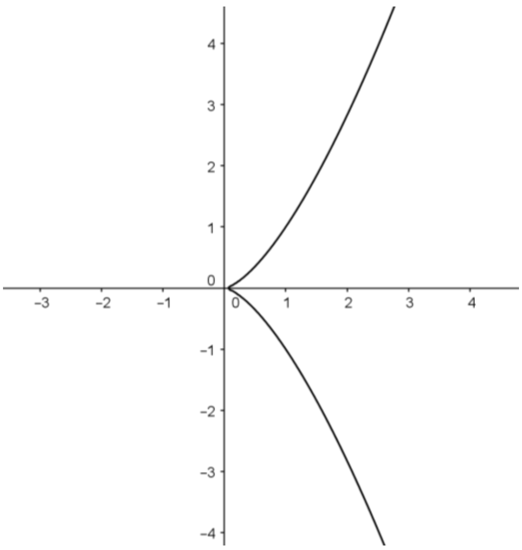


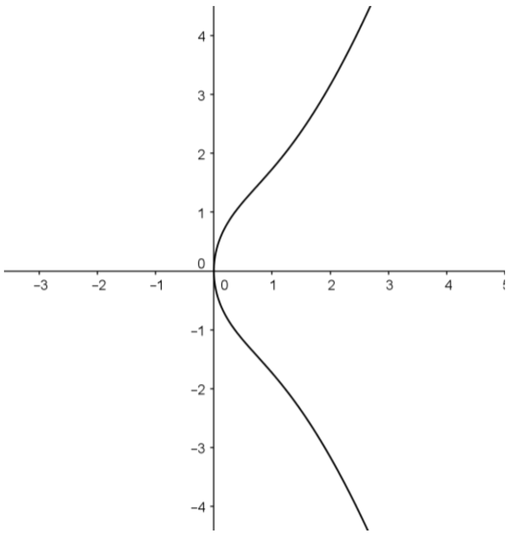
parabola con ovale (si è posto a = 1 , b = 4 e c = 3)

II)Nell’equazione (**) una delle radici è nulla e le altre due sono coincidenti se $b^2 = 4 \cdot c$:

parabola nodata (si è posto a = 1 *,* b = - 2 e c = 1)

III)Le tre radici dell’equazione $x \cdot (x^2 + b \cdot x + c) = 0$ sono tutte e tre coincidenti (e nulle) se $b = c = 0$:



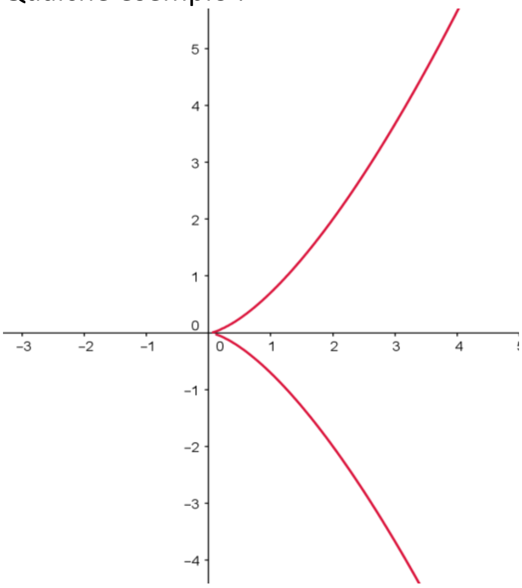


parabola cuspidata o semicubica (si è posto *a* = 1 , *b* = *c* = 0)
V)l'equazione (**) ha solo una radice reale (nulla) ,e le altre due complesse coniugate , se $b^2 < 4 \cdot c$:

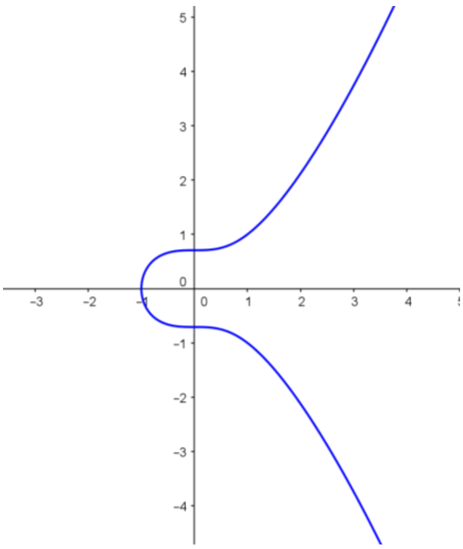
parabola campaniforme (si è posto *a* = 1 , *b* = 1 e *c* = 3)

All'età di circa 30 anni , Isaac Newton scrisse l'opera " Enumeratio linearum tertii ordinis " , nella quale registrò ben 72 specie di cubiche e tracciò il relativo grafico in un sistema di assi cartesiani . La sua classificazione è basata sulla loro forma , ma la nomenclatura fu rifatta nel 1869 dall'inglese F.W.Newman nella sua opera " On curves of the third degree , here called " tertians " " . I nuovi nomi sono molto fantasiosi e prendono spunto dalla floricoltura .

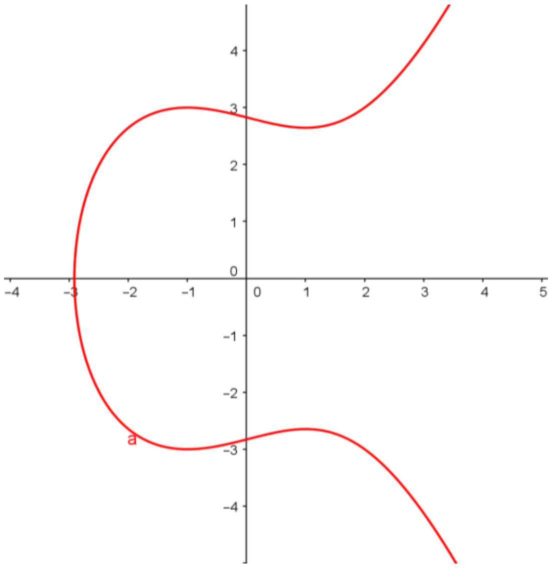
Qualche esempio :



giglio o parabola semicubica di equazione cartesiana : $a \cdot y^2 = x^3$ (qui è *a* = 2)

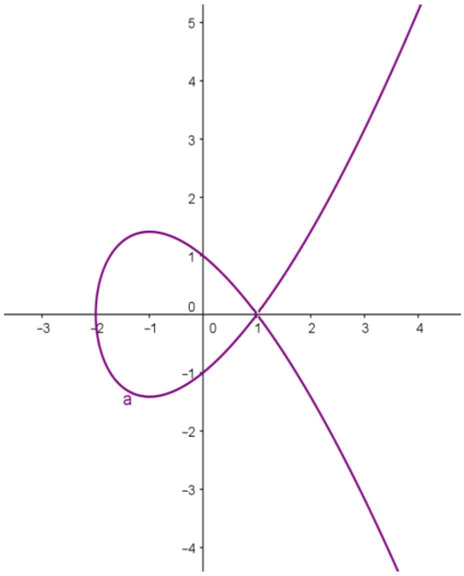


giacinto di equazione cartesiana : $a \cdot y^2 = x^3 + 1$ (qui è *a* = 2)



tulipano di equazione cartesiana :

$a \cdot y^2 = x^3 - 3 \cdot x + 16$ (qui è *a* = 2)



fucsia o calice nodato di equazione cartesiana : $a \cdot y^2 = x^3 - 3 \cdot x + 2$ (qui è *a* = 2)

LE PROPRIETA'

Le cubiche semplici , che sono quelle che si possono rappresentare con la più semplice equa-zione
(binomia) sono le seguenti :

$x^3 = a \cdot y^2$ $\qquad$ $x^3 = a^2 \cdot y$ $\qquad$ $x \cdot y^2 = a^3$

Esse si prestano a risolvere molto semplicemente il problema della duplicazione del cubo .

Se poniamo, infatti, nelle suddette tre equazioni , rispettivamente :

$$y = a \cdot \sqrt{2} \quad , \qquad y = 2 \cdot a \qquad \text{e} \qquad x = \frac{1}{2} y$$

troviamo :

$$x^3 = 2 \cdot a^3 \quad , \qquad x^3 = 2 \cdot a^3 \qquad \text{e} \qquad y^3 = 2 \cdot a^3 .$$

LA FORMULA MAGICA

Il matematico francese Gabriel Lamé riuscì a trovare un'unica formula che rappresenta , al variare di alcuni parametri , diverse figure piane. Recentemente , il botanico belga Johan Gielis ha individuato una nuova formula che lui stesso ha definito " la superformula " :

$$r = f(\varphi) \cdot \frac{1}{\left[\left| \frac{\cos\left(\frac{m\varphi}{4}\right)}{a} \right|^{n2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m\varphi}{4}\right)}{b} \right|^{n3} \right]^{\frac{1}{n1}}}$$

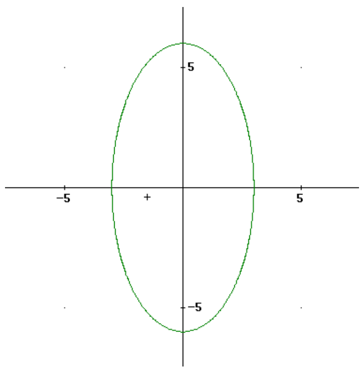
Al variare dei sette parametri : *a , b , m , n1 , n2 , n3* e della funzione *f (φ)* , attraverso la suddetta equazione si possono tracciare curve di forma varia .

Utilizziamo Derive per divertirci con questa formula .
Poniamo anzitutto $f(\varphi) = 1$

$$r = \frac{1}{\left(\left| \frac{\text{COS}\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a} \right|^{p} + \left| \frac{\text{SIN}\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b} \right|^{q} \right)^{1/n}}$$

Se si pone inoltre *a* = 3 , *b* = 6 , *m* = 4 , *n = p = q* = 2 si ha :

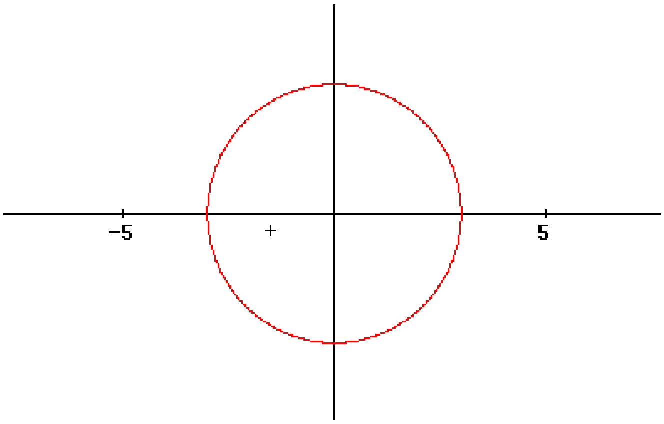
$$r = \frac{1}{\left(\left| \frac{\text{COS}\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{3} \right|^{2} + \left| \frac{\text{SIN}\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{6} \right|^{2} \right)^{1/2}}$$



e il grafico che si ottiene è quello di una ellisse la cui forma varia al variare di *a* e *b* .
Se $a = b$ si ottiene invece una circonferenza :

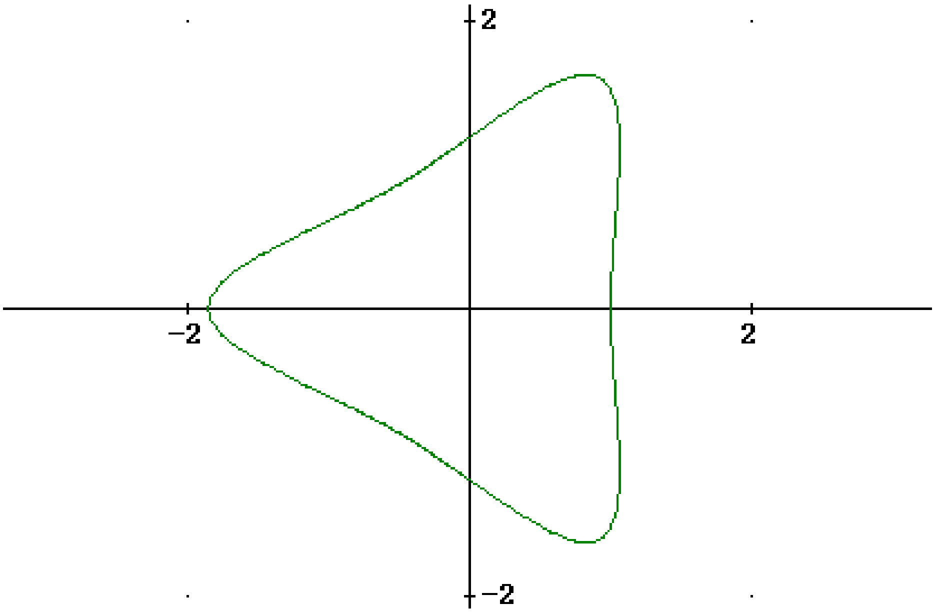
$$r = \frac{1}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{3}\right|^2 + \left|\frac{\sin\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{3}\right|^2\right)^{1/2}}$$

(qui è $a = b = 3$)



Se poniamo $a = b = 1$, $m = 3$, $n = 4.5$ e $p = q = 10$:

$$r = \frac{1}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{3 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^{10} + \left|\frac{\sin\left(\frac{3 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^{10}\right)^{1/4.5}}$$

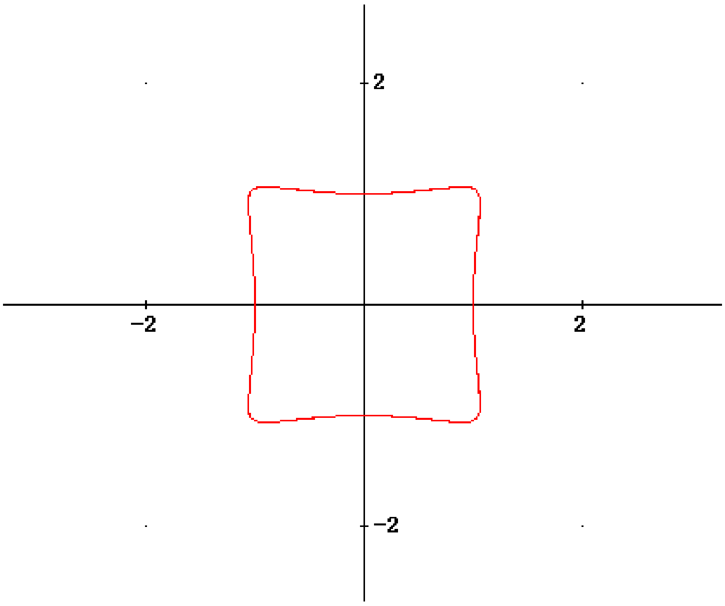


otteniamo un triangolo equilatero “ arrotondato “
Ponendo invece $a = b = 1$, $m = 4$, $n = 12$, $p = q = 15$:

$$r = \frac{1}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a}\right|^{p} + \left|\frac{\sin\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b}\right|^{q}\right)^{1/n}}$$

$$r = \frac{1}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^{15} + \left|\frac{\sin\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^{15}\right)^{1/12}}$$

$$r = \frac{1}{\left(\cos(t)^{14} \cdot |\cos(t)| + \sin(t)^{14} \cdot |\sin(t)|\right)^{1/12}}$$

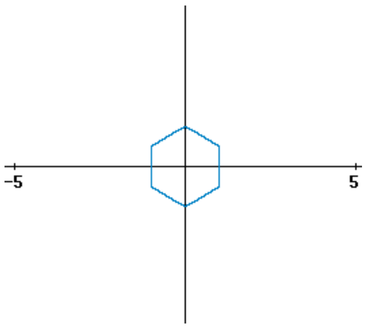


otteniamo un quadrato “ arrotondato”

Per $a = b = 1$, $m = 6$, $n = 1000$, $p = q = 390$:

$$r = \frac{1}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a}\right|^{p} + \left|\frac{\sin\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b}\right|^{q}\right)^{1/n}}$$

$$r = \frac{1}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{6 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^{390} + \left|\frac{\sin\left(\frac{6 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^{390}\right)^{1/1000}}$$

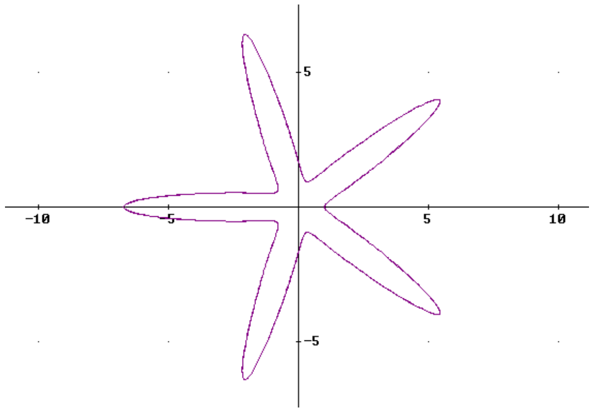


abbiamo un esagono regolare

Per $a = b = 1$, $m = 5$, $n = 2$, $p = q = 13$:

$$r = \frac{1}{\left(\left| \frac{\cos\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a} \right|^p + \left| \frac{\sin\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b} \right|^q \right)^{1/n}}$$

$$r = \frac{1}{\left(\left| \frac{\cos\left(\frac{5 \cdot t}{4}\right)}{1} \right|^{13} + \left| \frac{\sin\left(\frac{5 \cdot t}{4}\right)}{1} \right|^{13} \right)^{1/2}}$$

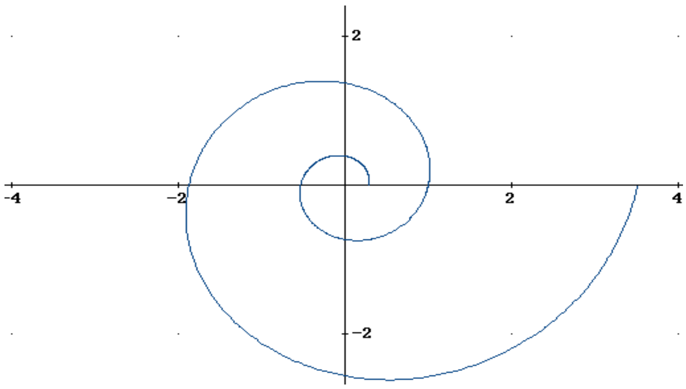


una stella marina .

Se poniamo invece $f(\varphi) = e^{k\varphi}$ nella formula magica (ricordiamo che f (ϕ) = $e^{k\varphi}$ è l'equazione della spirale logaritmica) , otteniamo spirali di varia forma :
Se $k = 0.2$, $a = b = 1$, $m = 4$, $n = p = q = 2$:

$$r = \frac{\text{EXP}(0.2 \cdot t)}{\left(\left| \frac{\cos\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a} \right|^p + \left| \frac{\sin\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b} \right|^q \right)^{1/n}}$$

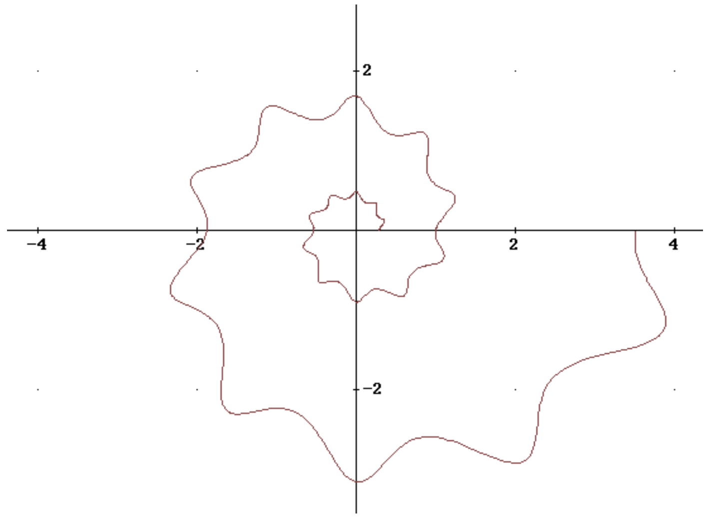
$$r = \frac{\text{EXP}(0.2 \cdot t)}{\left(\left| \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{1} \right|^2 + \left| \frac{\sin\left(\frac{4 \cdot t}{4}\right)}{1} \right|^2 \right)^{1/2}}$$



abbiamo una spirale equiangolare .
Se , ancora con $k = 0.2$, poniamo $a = b = 1$, $m = 10$, $n = p = q = 5$:

$$r = \frac{\mathrm{EXP}(0.2 \cdot t)}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{10 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^5 + \left|\frac{\sin\left(\frac{10 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^5\right)^{1/5}}$$

$$r = \frac{\hat{e}^{t/5}}{\left(\left|\cos\left(\frac{5 \cdot t}{2}\right)\right| \cdot \left(\frac{\cos(10 \cdot t)}{8} + \frac{\cos(5 \cdot t)}{2} + \frac{3}{8}\right) + \left|\sin\left(\frac{5 \cdot t}{2}\right)\right| \cdot \left(\frac{\cos(10 \cdot t)}{8} - \frac{\cos(5 \cdot t)}{2} + \frac{3}{8}\right)\right)^{1/5}}$$



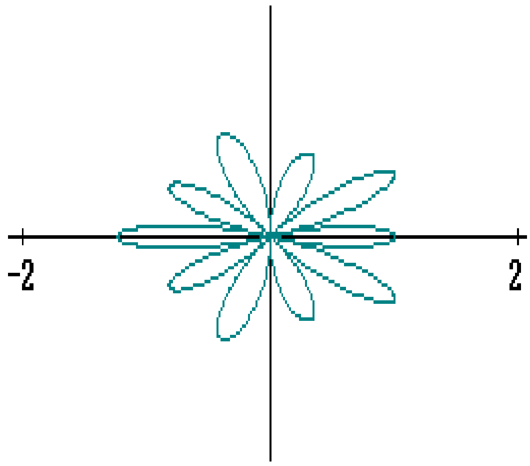
la spirale ha il merletto .

Proviamo ora a porre nella formula $f(\varphi) = |\cos \ \kappa\varphi|$

Se $k = 5$, $a = b = 1$, $m = n = p = q = 5$:

$$r = \frac{|\cos(5 \cdot t)|}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a}\right|^p + \left|\frac{\sin\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b}\right|^q\right)^{1/n}}$$

$$r = \frac{|\cos(5 \cdot t)|}{\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{5 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^5 + \left|\frac{\sin\left(\frac{5 \cdot t}{4}\right)}{1}\right|^5\right)^{1/5}}$$

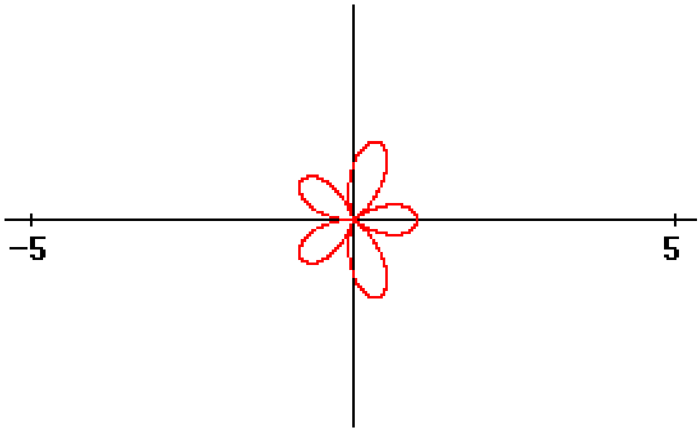


si ha un fiore con dieci petali

Se k = 2.5 , $a = b = 1$, $m = 2.5$, $n = p = q = 5$:

$$r = \frac{|\cos(2.5 \cdot t)|}{\left(\left| \frac{\cos\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{a} \right|^{p} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m \cdot t}{4}\right)}{b} \right|^{q} \right)^{1/n}}$$

$$r = \frac{|\cos(2.5 \cdot t)|}{\left(\left| \frac{\cos\left(\frac{2.5 \cdot t}{4}\right)}{1} \right|^{5} + \left| \frac{\sin\left(\frac{2.5 \cdot t}{4}\right)}{1} \right|^{5} \right)^{1/5}}$$



il fiore ha cinque petali .