Quando la letteratura parla di matematica: gli insiemi numerabili in un racconto di fantascienza.

Lorenzo Meneghini

> *"Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero* [dei granelli] *della sabbia sia infinito in quantità: dico non solo quello dei granelli di sabbia che sono intorno a Siracusa e nel resto della Sicilia, ma anche di quello* [dei granelli di sabbia] *che sono in ogni regione, sia abitata sia non abitata. Vi sono poi alcuni che ritengono che quel numero non sia infinito, ma che non si possa nominare un numero che superi la sua quantità. È chiaro che se coloro che così pensano si rappresentassero un volume di sabbia di grandezza uguale a quello della Terra, avendo riempito tutti i mari e tutte le depressioni fino a raggiungere l'altezza delle più alte montagne, molto meno comprenderebbero che si possa nominare un numero che superi quella quantità. Ma io tenterò di mostrarti, per mezzo di dimostrazioni geometriche che tu potrai seguire, che dai numeri da noi denominati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, alcuni superano non soltanto il numero* [dei granelli] *della sabbia aventi* [nell'insieme] *grandezza uguale alla Terra riempita come abbiamo detto, ma anche la grandezza uguale al cosmo* [intero]*."*

Questo scriveva Archimede nell'*Arenario*, oltre duemila anni fa. Mediante ragionamenti geometrici piuttosto raffinati, Archimede arriva ad affermare che il numero dei granelli di sabbia in grado di riempire l'intero universo, per com'era concepito all'epoca, sarebbe approssimativamente 10^{63}. La scrittura compatta, fornita dall'odierna notazione scientifica, non deve trarci in inganno.

Si tratta davvero di un numero enorme. Basta pensare che il raggio dell'atomo di idrogeno nel modello di Bohr è stimato in $53\cdot10^{-12}$ m; se, quindi, potessimo incolonnare tanti atomi di idrogeno quanti sono i granelli di sabbia di cui parla Archimede, otterremo una fila lunga $10^{63}\cdot 2\cdot 53\cdot 10^{-12}=1{,}06\cdot 10^{53}m$.

Ma quanto grande è questo numero? Ricordiamo che la velocità della luce nel vuoto è $c\simeq 3\cdot 10^{8}\dfrac{m}{s}$ e che in un anno ci sono $60^2\cdot 24\cdot 365=3{,}1536\cdot 10^{7}s$; quindi un anno luce equivale a $3\cdot 10^{8}\cdot 3{,}1536\cdot 10^{7}\simeq 9{,}46\cdot 10^{15}m$, che è decisamente più piccolo! Non meno sorprendente è il confronto di tale lunghezza con le dimensioni dell'Universo osservabile, stimate in 45,6 miliardi di anni luce, pari a circa $4{,}31\cdot10^{26}$ m.

Oggi siamo abituati a pensare, ad esempio, che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali contenga numeri arbitrariamente grandi, ma se ci riflettiamo a fondo possiamo trovare comunque alcune proprietà stupefacenti.

L'obiettivo di queste note è mostrare, anche mediante il commento di alcuni passi letterari, che esistono insiemi infiniti e cercare di spiegare le loro curiose proprietà.

GLI INSIEMI INFINITI

Per iniziare il nostro percorso, diciamo che *due insiemi sono **equipotenti** se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi*[1].

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e l'insieme A dei quadrati perfetti; si dimostra facilmente che la funzione che associa a ciascun numero naturale il suo quadrato è una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, che pertanto risultano equipotenti. Di questo fatto si era accorto Galileo che, nelle *"Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze"*, così fa parlare Salviati:

> *"**Salviati:** [...] Per prova di che già mi sovvenne un sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio, che ha mossa la difficoltà. Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.*
> ***Simplicio:** So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in sé medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal due, e questo dal tre, in sé medesimi moltiplicati.*
> ***Salviati:** Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in sé stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?*
> ***Simplicio:** Non si può dir altrimenti.*
> ***Salviati:** Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, lor esser tanti quante son le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice più d'un quadrato solo.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	4	9	16	25	36	49	64	81	…

> ***Simplicio:** Così sia.*
> ***Salviati:** Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le loro radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.*
>
> **1** 2 3 **4** 5 6 7 8 **9** 10 11 12 13 14 15 **16** 17 18 …"

In questo brano, Galileo chiarisce perchè l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali[2] è equipotente ad A, suo sottoinsieme proprio, cosa – questa – impossibile per gli insiemi finiti. Si tratta, infatti, di una delle proprietà caratteristiche degli insiemi infiniti[3].

[1] Diremo, in tal caso, che i due insiemi hanno la stessa cardinalità.
[2] In queste note considereremo anche lo zero tra i numeri naturali, contrariamente a quanto affermava Galileo.
[3] Vd. [5] – Corollario 3.5, pag. 26

Da qui in avanti diremo, quindi, che *un insieme è **infinito** se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio*.

Diremo inoltre che *un insieme è **numerabile** se e solo se è equipotente a* $\mathbb{N}$; si può dimostrare che gli insiemi numerabili sono "i più piccoli" tra gli insiemi infiniti.

GLI INSIEMI NUMERABILI

Vogliamo ora presentare alcune delle proprietà apparentemente paradossali degli insiemi numerabili.

Il brano seguente, tratto da un racconto di Stanislaw Lem[4], spiega in modo sorprendentemente chiaro alcune delle proprietà degli insiemi numerabili.

Ne esamineremo alcuni passaggi, cercando di chiarire i dettagli matematici.

> *"[...] Cosa più importante, nell'hotel c'era* un numero infinito di stanze. *Gli esuli speravano che da quel momento in poi nessuno avrebbe più dovuto sentire la famosa frasetta irritante che li aveva afflitti nei loro vagabondaggi: «Non c'è più posto».*
> *Nonostante ciò, non ebbi fortuna. La prima cosa che attrasse la mia attenzione entrando nella hall fu un cartello: «I delegati del congresso di zoologia cosmica sono pregati di registrarsi al 127° piano».*
> *Siccome gli zoologi cosmici venivano da tutte le galassie, e di galassie ne esiste un numero infinito, saltò fuori che tutte le stanze erano occupate da partecipanti del congresso. Non c'era posto per me. Il conciérge tentò, è vero, di convincere qualche delegato a stringersi un po', in modo che potessi dividere la stanza con uno di loro. [...]*
> *Dopo aver meditato un po', il direttore si rivolse al conciérge e gli disse:*
> *– Mettilo nella stanza 1.*
> *– E dove metterò l'ospite della 1?*
> *– Mettilo nella 2. Sposta l'ospite della 2 nella 3, quello della 3 nella 4 e così via.*
> *Fu solo in quel momento che cominciai ad apprezzare le qualità insolite dell'hotel. Se ci fosse stato solo un numero finito di stanze, l'ospite dell'ultima si sarebbe dovuto trasferire nello spazio interstellare. Ma siccome l'hotel aveva un numero infinito di stanze, c'era spazio per tutti, e io potei prendere possesso di una stanza senza privare alcun zoologo cosmico della sua. [...]"*

In questo frammento l'autore racconta in parole semplici che *se si aggiunge un oggetto ad un insieme numerabile si ottiene ancora un insieme numerabile*.

Sia, infatti, $A = \left\{a_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ e sia b il nuovo oggetto, non presente in A. Si dimostra abbastanza facilmente che la funzione:

$$f\left(n\right) = \begin{cases} b & n = 0 \\ a_{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme $B = A \cup \left\{b\right\}$. Generalizzando, possiamo affermare che *l'unione di un insieme finito ed uno numerabile è ancora numerabile*.

[4] "L'hotel straordinario, o il milleunesimo viaggio di Ion il tranquillo" si può trovare in [4].

Si potrebbe dimostrare anche che l'unione tra due insiemi numerabili è numerabile; l'idea solitamente seguita per la formalizzazione è essenzialmente la stessa utilizzata da Stanislaw Lem nel brano seguente.

> *"[...]Ma il terzo giorno del mio soggiorno nell'hotel, mentre stavo andando dal conciérge per pagare la mia stanza, vidi con disappunto che dal suo banco si estendeva una fila la cui fine scompariva da qualche parte nei pressi delle Nubi di Magellano. [...]*
> *Confuso, mi rivolsi al conciérge:*
> *– Chi sono queste persone?*
> *– Questo è il congresso interstellare dei filatelici.*
> *– E ce ne sono molti?*
> *– Un insieme infinito: un rappresentante per ogni galassia.*
> *– Ma come farete a trovar loro una stanza? Dopotutto, gli zoologi cosmici non se ne vanno fino a domani...*
> *– Non lo so. Sto giusto andando a parlarne un momento con il direttore.*
> *Ad ogni modo, il problema questa volta si rivelò molto più difficile, e un momento si trasformò in un'ora. Alla fine il conciérge lasciò l'ufficio del direttore e cominciò a dare le sue disposizioni. Anzitutto chiese all'ospite della stanza 1 di spostarsi nella 2. Questo mi sembrò strano, perché sapevo per esperienza personale che uno spostamento del genere avrebbe liberato una sola stanza, mentre dovevamo trovare posto per nientemeno che un insieme infinito di filatelici. Ma il conciérge continuò a dare ordini:*
> *— Mettete l'ospite della 2 nella 4, quello della 3 nella 6, e in generale mettete l'ospite della stanza n nella stanza 2n.*
> *Ora il suo piano diventava chiaro: con questo sistema avrebbe liberato l'insieme infinito delle stanze dispari e sarebbe stato in grado di sistemarvi i filatelici. Così, alla fine i numeri pari si trovarono ad essere occupati dagli zoologi cosmici e i numeri dispari dai filatelici. [...]"*

Con questo trucco in mente, mostreremo ora che l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi è equipotente a quello dei numeri naturali. Ricordiamo innanzitutto che si può pensare[5] che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ e che, pertanto, $\mathbb{Z}$ è infinito (è almeno numerabile).
Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita ponendo:

$$f(n) = \begin{cases} 2n & n \geq 0 \\ -(2n+1) & n < 0 \end{cases}$$

Questa funzione prende i numeri interi positivi e li manda nel loro doppio, cioè nei numeri naturali pari, e "libera le posizioni" occupate dai numeri dispari, nelle quali manda i numeri negativi.
È abbastanza facile convincersi (e non sarebbe troppo complicato da formalizzare) che questa funzione realizza una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{Z}$ e l'insieme $\mathbb{N}$, che risultano perciò equipotenti tra loro.

---

[5] In realtà le cose non stanno proprio così. A rigore dovremmo affermare che l'insieme $\mathbb{Z}$ contiene una *"copia isomorfa"* dell'insieme $\mathbb{N}$, costituita dall'insieme dei numeri interi positivi. La costruzione formale degli insiemi numerici a partire da $\mathbb{N}$ non è tra gli obiettivi di queste note, poiché risulterebbe oltremodo laboriosa e complessa per uno studente liceale. Ci basterà osservare, comunque, che gli oggetti "+5" e "5", pur non essendo identici (il primo è un numero intero positivo ed il secondo è naturale), hanno esattamente le stesse proprietà (dal punto di vista formale), il che ci consente di trattarli come se in realtà lo fossero.

La cosa potrebbe suonare molto strana perché l'insieme $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato (dallo zero), mentre $\mathbb{Z}$ non ha alcun "primo elemento", ma è perfettamente coerente con le definizioni. Bisogna però fare attenzione perché la funzione precedentemente descritta modifica il consueto ordinamento dei punti sulla retta, secondo lo schema:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	−1	1	−2	2	−3	3	−4	4	−5	5	…

alternando di fatto, nella successione, numeri positivi e negativi progressivamente più distanti da 0.
Utilizzando più volte una costruzione simile a questa si riesce a dimostrare, quindi, che *l'unione finita di insiemi numerabili è a sua volta un insieme numerabile*: basta, infatti, unirne due alla volta ottenendo un nuovo insieme numerabile, da unire al successivo; in un numero finito di passi si completa la dimostrazione.
Le sorprese, però, non si esauriscono qui, e non solo nella teoria di Cantor.
L'autore del racconto ci presenta, infatti, un nuovo colpo di scena: come sistemare gli infiniti ospiti di un insieme infinito di hotel, in uno che risulta già pieno.
Vediamolo.

> *"Gli instancabili costruttori erano andati avanti e avevano fondato un insieme infinito di hotel, ognuno dei quali aveva infinite stanze. Per far ciò avevano smantellato così tante galassie che l'equilibrio intergalattico ne era stato sconvolto, cosa che poteva comportare serie conseguenze. Era stato quindi chiesto loro di chiudere tutti gli hotel eccetto il nostro, e di rimettere al suo posto il materiale usato. Ma era difficile eseguire quest'ordine, dal momento che tutti gli hotel (incluso il nostro) erano pieni. Al direttore era stato chiesto di spostare tutti gli ospiti da un numero infinito di hotel – ognuno dei quali con infiniti ospiti – a un unico hotel, che era già pieno! […]*
> *La soluzione migliore fu proposta da uno dei filatelici, il presidente dell'Accademia di Matematica della galassia del Cigno, che suggerì di procedere a una tabulazione nelle cui righe comparisse il numero dell'hotel, e nelle colonne i numeri delle stanze. Per esempio, all'intersezione della riga 4 con la colonna 6 sarebbe comparsa la sesta stanza del quarto hotel. Ecco la tabella (in realtà, solo la parte superiore, perché scriverla per intero richiederebbe l'impiego di infinite righe e colonne).*

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	…	$(1,n)$	…
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	…	$(2,n)$	…
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	…	$(3,n)$	…
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	…	$(4,n)$	…
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	…	$(5,n)$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
$(n,1)$	$(n,2)$	$(n,3)$	$(n,4)$	$(n,5)$	…	(n,n)	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

– E ora sistemate gli ospiti secondo i quadrati, – disse il matematico-filatelico.
– Cosa? – Il direttore non capiva.
– Secondo i quadrati. Nella stanza 1 mettete l'ospite di (1,1), cioè della prima stanza del primo hotel; nella 2 mettete l'ospite di (1,2), cioè della seconda stanza del primo hotel; nella 3 mettete l'ospite di (2,2), la seconda stanza del secondo hotel, e nella 4... l'ospite di (2,1), la prima stanza del secondo hotel. In questo modo avremo sistemato gli ospiti del quadrato in alto a sinistra con lato 2. Dopo di che mettete l'ospite di (1,3) nella stanza 5, di (2,3) nella stanza 6, di (3,3) nella 7, di (3,2) nella 8, di (3,1) nella 9. (Queste stanze riempiono il quadrato di lato 3). E continuiamo in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & & \cdots & (1,n) & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & & \cdots & (2,n) & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & & \cdots & (3,n) & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & (4,5) & & \cdots & (4,n) & \cdots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(5,1) & \leftarrow & (5,2) & \leftarrow & (5,3) & \leftarrow & (5,4) & \leftarrow & (5,5) & & \cdots & (5,n) & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \vdots & \downarrow & \vdots \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow & (n,5) & \leftarrow & \cdots & (n,n) & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

– Ci sarà davvero spazio per tutti? – Il direttore era dubbioso.
– Naturale. Dopotutto, secondo questo schema sistemiamo gli ospiti delle prime n stanze dei primi n hotel nelle prime n^2 stanze. Quindi, prima o poi ogni ospite riceverà una stanza. Per esempio, se consideriamo l'ospite della stanza 136 dell'hotel numero 217, troviamo che lui riceverà una stanza al duecentodiciassettesimo passaggio. Possiamo anche calcolare facilmente quale stanza sarà: la numero $216^2 + 136$. Più in generale, se l'ospite occupa la stanza n nell'hotel m, allora se $n \geq m$ occuperà la stanza numero $\left(n-1\right)^2 + m$, e se $n < m$, la numero $m^2 - n + 1$.
Il progetto avanzato fu riconosciuto come il migliore: tutti gli ospiti di tutti gli hotel avrebbero trovato posto nel nostro e nemmeno una stanza sarebbe rimasta vuota. Il matematico-filatelico ricevette il premio, un tour della galassia LCR-287. […]"

La strategia proposta in questo passaggio consente, come abbiamo visto, di dimostrare che *l'unione di un'infinità numerabile di insiemi numerabili è essa stessa numerabile*. Infatti, rappresentando gli insiemi con una "tabella infinita" e procedendo "secondo i quadrati" si riesce a costruire una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti della tabella e l'insieme $\mathbb{N}$.

In questo modo si può, quindi, dimostrare anche che gli insiemi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sono numerabili: in entrambi i casi si tratta, infatti, dell'unione numerabile di insiemi numerabili. Poco conta che nel racconto l'insieme $\mathbb{N}$ non contenga lo zero; come abbiamo visto nel paragrafo precedente, l'aggiunta di un elemento ad un insieme numerabile non ne modifica la cardinalità e quindi non cambia la sostanza del discorso.

Può essere molto interessante esaminare in dettaglio altre due costruzioni che ci forniscono una "dimostrazione diretta" della numerabilità degli insiemi $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Consideriamo innanzitutto l'insieme $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dei punti a coordinate intere del piano cartesiano (vd. Fig. 1*a*).

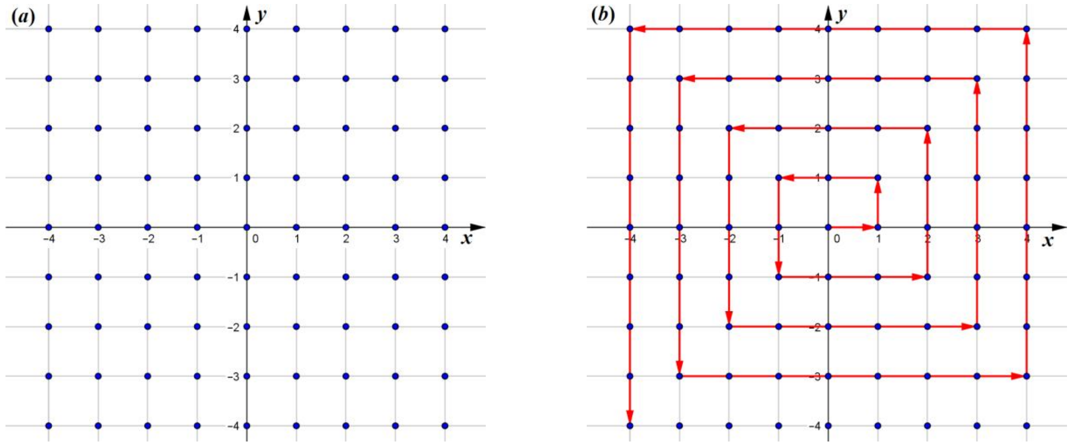

Fig. 1 – Costruzione della corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$

Partendo dal punto di coordinate (0, 0) costruiamo una spirale come in fig. 1*b*; in questo modo toccheremo tutti i punti a coordinate intere del piano cartesiano, costruendo la successione di punti:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(–1,1)	(–1,0)	(–1,–1)	(0,–1)	(1,–1)	(2,–1)	(2,0)	…

Si riesce a dimostrare che, così facendo, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, cioè che $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è numerabile. A questo punto non sarebbe nemmeno necessario cercare un'ulteriore conferma della numerabilità di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, visto che si tratta di un insieme infinito contenuto in un insieme numerabile.

D'altra parte, è molto interessante esaminare la seguente costruzione, che consente di ottenere una dimostrazione diretta della numerabilità di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, alternativa a quella descritta nel racconto.

Innanzitutto rappresentiamo i punti del piano cartesiano le cui coordinate sono espresse da coppie di numeri naturali (Fig. 2*a*), dopodiché, partendo dall'origine, disegniamo un percorso lungo rette parallele alla bisettrice del 2° e 4° quadrante (come in Fig. 2*b*).

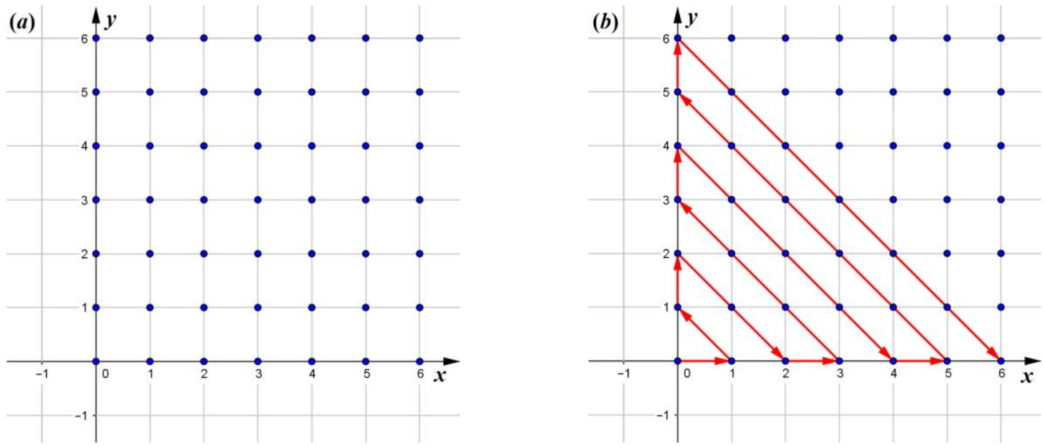

Fig. 2 – Costruzione della corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$

Così facendo, toccheremo tutti i punti del piano cartesiano le cui coordinate sono numeri naturali, costruendo la sequenza:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
(0,0)	(1,0)	(0,1)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)	(0,4)	…

Non è troppo difficile osservare che la funzione così costruita è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cioè – in ultima analisi – che $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è numerabile; ma la cosa più interessante è che questo modo di procedere somiglia molto a quello utilizzato da Georg Cantor per dimostrare la numerabilità dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali (si veda anche [10]).

CONCLUSIONI

In conclusione, in queste note abbiamo analizzato alcuni passi letterari che parlano di "numeri grandi" o di insiemi infiniti cercando di metterne in evidenza i profondi contenuti matematici, nella consapevolezza che questo discorso non può certo dirsi completo sia per la vastità della produzione letteraria che tocca, anche solo marginalmente, l'argomento, sia per il fatto di aver presentato solo gli insiemi numerabili ed aver volutamente trascurato di parlare di quelli più che numerabili, come l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali[6]. La speranza era, però, quella di stuzzicare nel lettore la ricerca di ulteriori punti di contatto tra discipline molto diverse tra loro. Se ci saremo riusciti anche solo con qualche giovane studente, potremo dire di aver raggiunto il nostro scopo.

[6] Si veda anche [2], pagg. 126 – 128

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] C. Boyer, *"Storia della matematica"*, Oscar Mondadori, Farigliano (CN), 1990

[2] R. Courant, H. Robbins, *"Che cos'è la matematica?"*, Bollati Boringhieri Ed., Torino (2000)

[3] Archimede, *"Arenario"*, in Archimede, *Opere*, a cura di A. Frajese, Utet, Torino (1974)

[4] AA.VV., *"Racconti matematici"*, a cura di C. Bartocci, Giulio Einaudi Ed., Torino (2006)

[5] E. Gregorio, F. Mantese, "Matematica di base", http://profs.sci.univr.it/~gregorio/MatematicaDiBase.pdf

[6] http://www.dm.uniba.it/ipertesto/galileo/infinito_galilei.doc

[7] http://www.dm.uniba.it/ipertesto/galileo/discorso_scienze.doc

[8] http://www.heinrichfleck.net/astronomia/lemmi/archimede.pdf

[9] C. Censori, "Le dimensioni dell'Universo", http://www.treccani.it/enciclopedia/le-dimensioni-dell-universo_(XXI-Secolo)/

[10] L. Meneghini, "Verso l'infinito ed oltre. Un percorso ad ostacoli da Pitagora ai giorni nostri", in «Euclide. Giornale di matematica per i giovani», n. 29 (2016) - http://www.euclide-scuola.org/