Osservazioni sul calcolo dei volumi nei temi d'esame.

Lorenzo Meneghini

Negli ultimi anni le richieste sul calcolo dei volumi presenti in temi d'esame han subito delle trasformazioni significative, che hanno richiesto un'attenta riflessione da parte di noi insegnanti, non sempre supportati da strumenti adeguati forniti dai libri di testo. Queste note nascono da un'esperienza didattica che svolgo normalmente con i miei studenti a partire dal 2004, introducendo il calcolo integrale per la determinazione del volume dei solidi. Verrà presentata e discussa, inoltre, una panoramica di quesiti relativi al calcolo dei volumi, proposti agli Esami di Stato.

IL METODO DELLE FETTE

Quando ho iniziato a spiegare ai miei studenti le applicazioni del Principio di Cavalieri, oggi più conosciute come *"metodo delle fette"* ([5]), avevo ancora in testa le parole pronunciate dal Prof. Istvan Lenhart quando, con un coltello ed una mela in mano, spiegava ad un uditorio eterogeneo il concetto di *retta* nella geometria sferica di Riemann, affermando che la retta è la linea ottenuta sezionando una sfera (la mela) con un piano (il coltello).

Fig. 1 – Istvan Lenhart visualizza il concetto di retta su una sfera

Memore anche degli insegnamenti di Bruno de Finetti, che si chiedeva "perché, ad esempio, parlando di ellissi ottenute da sezioni oblique di un cilindro ci si dovrebbe inibire di dar corpo e sapore al concetto materializzandolo nell'immagine dell'affettare un salame?", ho iniziato a *rendere visibile* il Principio di Cavalieri proprio affettando un salame durante la lezione. In questo modo è abbastanza facile far capire che "il volume totale è pari alla somma dei volumi delle singole fette" e che, se $S(x)$ indica la superficie di una sezione del solido (la *fetta*) e dx ne rappresenta lo spessore, il volume della singola fetta è espresso da

$$dV = S(x)dx \tag{1}$$

ed il volume complessivo si può ottenere integrando la precedente espressione in un intervallo opportuno.

Partendo da queste idee è abbastanza facile dimostrare non solo l'usuale formula per il calcolo del volume di un solido ottenuto dalla rotazione[1] di una superficie attorno all'asse x:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{2}$$

ma anche, più in generale, che

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{3}$$

rappresenta il volume di un solido le cui sezioni, con piani ortogonali all'asse x, hanno superficie $S(x)$.

Presentiamo un paio di esempi per illustrare i metodi in questione.

1) LICEO SCIENTIFICO PNI – A.S. 2009/'10 SESSIONE SUPPLETIVA – Q. 8
Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$*; siano* $P(0,3)$ *e* $Q(2,\sqrt{5})$ *punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo PORQ (con R proiezione di Q sull'asse x).*

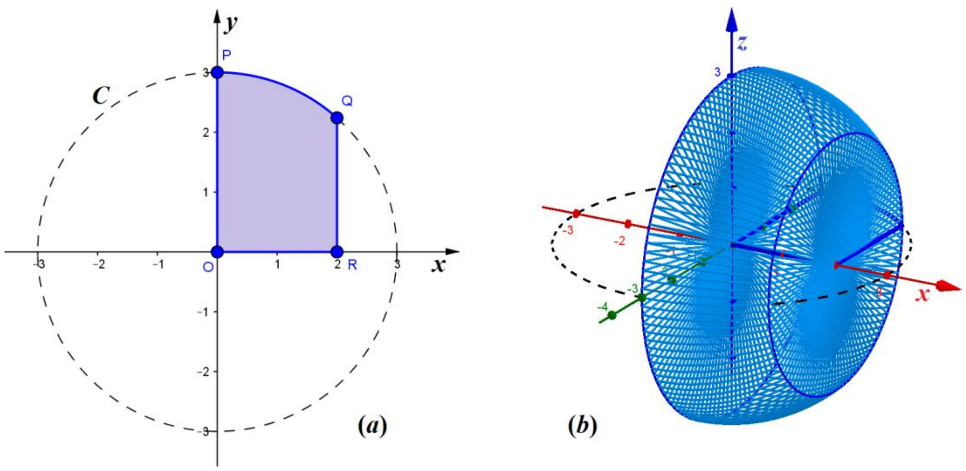


Fig. 2 – Immagine del solido di rotazione (segmento sferico a due basi)

La funzione che definisce l'arco $\overset{\frown}{PQ}$ è $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; pertanto:

[1] Una panoramica di formule classiche sul calcolo dei volumi è disponibile al link: https://app.box.com/s/3d0gigxlne13ojo18b6it4zpx5tyj1le

$$V = \pi \int_0^2 9 - x^2 dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{46}{3} \pi \, u^3$$

È interessante osservare che, in questo caso, il quesito non richiede esplicitamente il ricorso al calcolo integrale; si potrebbe pertanto utilizzare anche la formula del volume del segmento sferico a due basi (vd. precedente nota a piè di pagina), ottenendo ugualmente:

$$V = \frac{\pi h}{6} \left[3\left(r_1^2 + r_2^2 \right) + h^2 \right] = \dots = \frac{46}{3} \pi \, u^3$$

2) <u>LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO – A.S. 2006/'07 SESSIONE ORDINARIA – Q. 1</u>
La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (in figura 3a) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani ortogonali all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

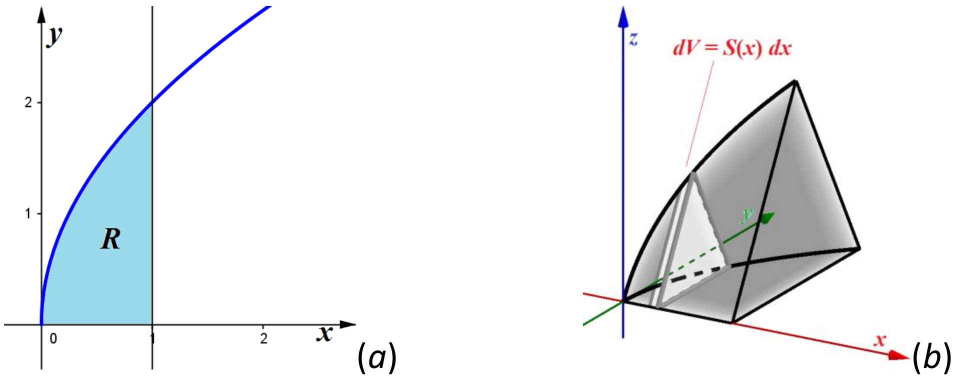


Fig. 3 – (*a*) Immagine presente nel testo del quesito 1, tema d'esame 2006/'07.
(*b*) Immagine del solido S.

Ricordando che l'area di un triangolo equilatero si può esprimere, in funzione del suo lato, in questo modo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 ,$$

l'elemento di volume è $dV = S\left(x\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[f\left(x\right) \right]^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4x \, dx = \sqrt{3} x \, dx$ e quindi il volume richiesto vale

$$V = \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} u^3$$

METODO DEI GUSCI CILINDRICI

Il modo migliore che conosco per ancorare all'esperienza quotidiana il *metodo dei gusci cilindrici*, che viene spesso utilizzato per determinare il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y, è quello di mostrare un'immagine del porro (vd. fig. 4), ortaggio costituito da "gusci cilindrici concentrici".

Come si immagina facilmente, il volume del solido può essere ottenuto integrando l'elemento di volume

$$dV = 2\pi\left|x \cdot f\left(x\right)\right|dx \qquad (4)$$

in cui $\left|x\right|$ rappresenta il raggio e $\left|f\left(x\right)\right|$ rappresenta l'altezza del guscio cilindrico e dx ne rappresenta lo spessore. Osserviamo che nella (4) il valore assoluto è superfluo, se x e $f\left(x\right)$ sono non negativi.

Fig. 4 – Il porro è un buon esempio di solido costituito da "gusci cilindrici"

Il primo quesito d'esame in cui compare il riferimento esplicito a questo metodo di calcolo è il seguente.

<u>LICEO SCIENTIFICO PNI – A.S. 2009/'10 SESSIONE ORDINARIA – Q. 10</u>

Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$*, dall'asse x e dalla retta* $x = 4$.

L'integrale $\int_0^4 2\pi x\left(\sqrt{x}\right)dx$ *fornisce il volume del solido:*

a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x;
b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y;
c) di base R le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$ *;*
d) *nessuno di questi.*

La rotazione della regione R (fig. 5*a*) attorno all'asse *y* genera un solido (fig. 5*b*) il cui volume può essere espresso, per quanto detto visto sopra, dall'integrale

$$\int_0^4 2\pi x\left(\sqrt{x}\right)dx\,.$$

Il termine $2\pi x\left(\sqrt{x}\right)$ rappresenta, infatti, la superficie laterale di un cilindro di altezza $\sqrt{x}$ e raggio di base x; pertanto $2\pi x\left(\sqrt{x}\right)dx$ rappresenta il volume della "buccia" del generico guscio cilindrico. La "somma" dei volumi di tutti questi gusci fornisce il volume del solido.

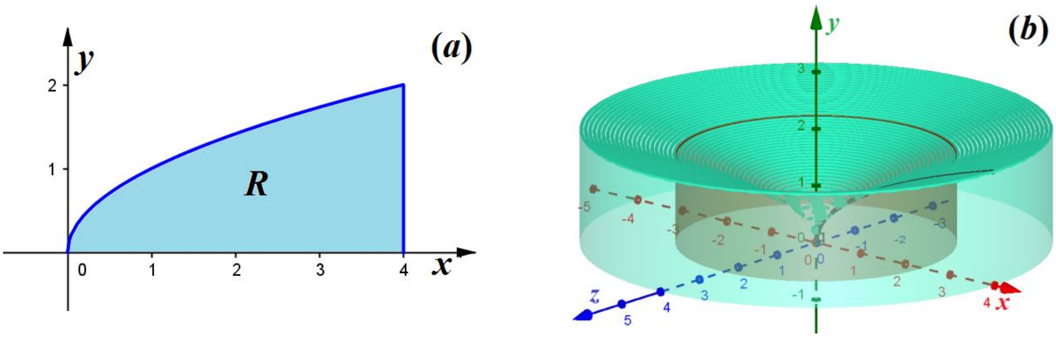


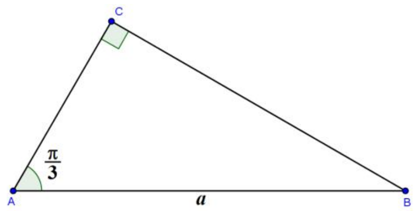
Fig. 5 – (*a*) Immagine della regione R descritta dal quesito.
(*b*) Solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse *y*.

MISCELLANEA DI PROBLEMI

Presentiamo ora una panoramica di quesiti e problemi inerenti al calcolo dei volumi, assegnati negli ultimi Esami di Stato, corredati di soluzioni ed osservazioni metodologiche.

1) LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO – A.S. 2007/'08 SESSIONE ORDINARIA – P. 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ *e l'angolo* $\widehat{CAB} = \dfrac{\pi}{3}$.



[…]

d) *Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati.*

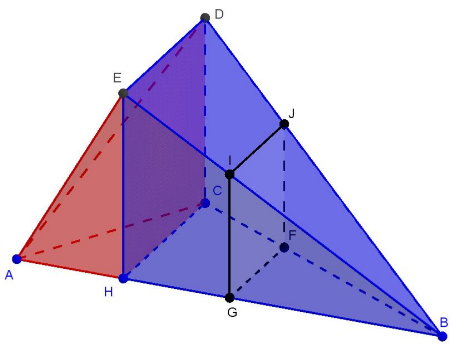


Fig. 6 – Il solido descritto dal problema

Come si può notare dalla figura precedente, il solido di cui viene richiesto il volume è ottenuto sovrapponendo due piramidi aventi la medesima base quadrata. È utile, quindi, far notare agli studenti che il problema può essere risolto agevolmente anche senza ricorrere al calcolo integrale, visto che non è esplicitamente richiesto, ma basandosi essenzialmente su proprietà geometriche elementari. Basta, infatti, sommare i volumi delle due piramidi:

$$V_{tot} = V_{rosso} + V_{blu} = \frac{1}{3} \cdot S\left(CDEH\right) \cdot AB$$

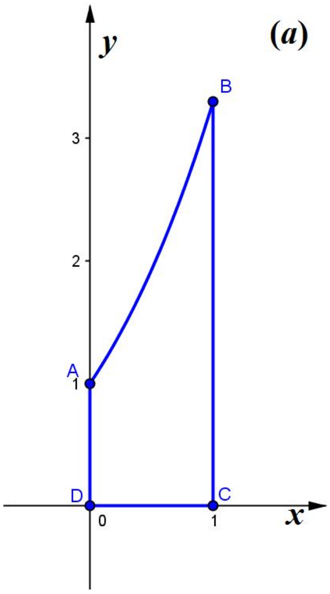
dal momento che, per ipotesi, il segmento AB è ortogonale alla base CDEH.

Il triangolo ABC è metà di un triangolo equilatero, pertanto $AC = \frac{a}{2}$; per similitudine tra i triangoli ABC ed ACH, inoltre, $CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$. Quindi:

$$V_{tot} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{16}.$$

2) <u>LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO – A.S. 2007/'08 SESSIONE SUPPLETIVA – Q. 7</u>

La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{\frac{x}{2}}\left(x+1\right)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.



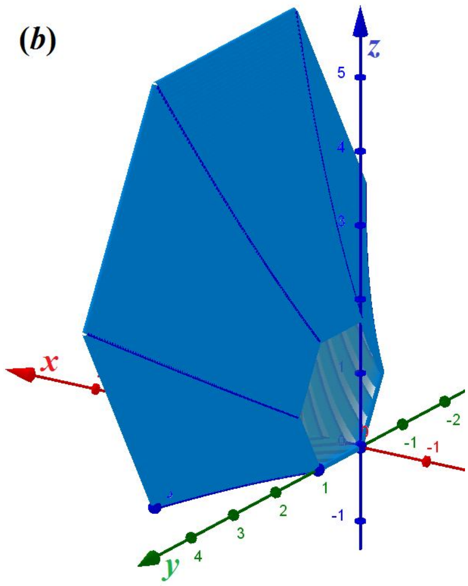


Fig. 7 – (*a*) La regione finita di piano, base del solido.
(*b*) Rappresentazione del solido descritto dal quesito.

Anche in questo caso, il problema si può risolvere utilizzando il "metodo delle fette"; dal momento che l'esagono regolare può essere suddiviso in sei triangoli equilateri, l'elemento di volume è

$$dV = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left[f\left(x\right)\right]^2 dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} e^x \left(x+1\right)^2 dx\,.$$

Integrando per parti due volte otteniamo:

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^1 e^x \left(x+1\right)^2 dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[e^x\left(x+1\right)^2\right]_0^1 - 3\sqrt{3}\int_0^1 e^x dx =$$

$$= 6\sqrt{3}e - \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}\left[e^x\left(x+1\right)\right]_0^1 + 3\sqrt{3}\int_0^1 e^x dx = \ldots = 3\sqrt{3}\left(e - \frac{1}{2}\right)u^3$$

3) <u>LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO – A.S. 2004/'05 SESSIONE ORDINARIA – P. 1</u>

Nel primo quadrante di un sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$.

a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.

b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$

[…]

a) Per il calcolo del volume richiesto, applicando il metodo dei gusci cilindrici integriamo l'elemento di volume

$$dV = 2\pi x \cdot f\left(x\right)dx = 2\pi\left(6x - x^3\right)dx\,.$$

In questo modo otteniamo:

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{6}} 6x - x^3\,dx = 2\pi\left[3x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{6}} = 18\pi\,u^3$$

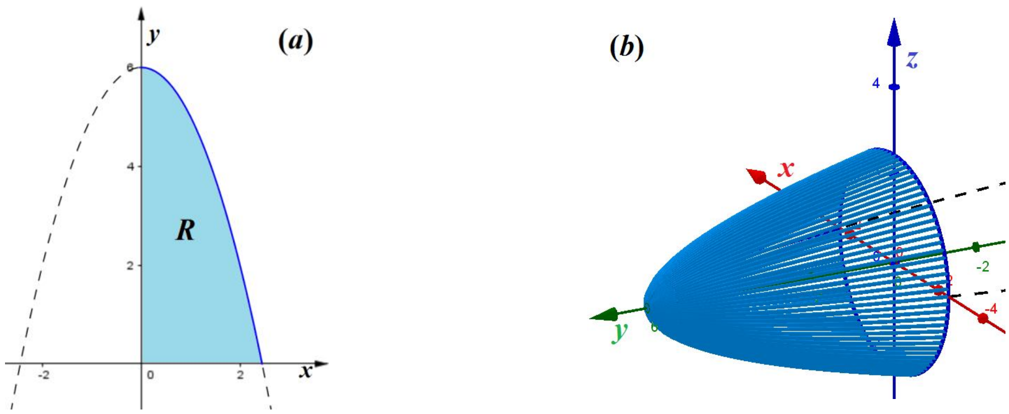


Fig. 8 – Le immagini relative alla prima domanda del problema

NOTA: Questo è il primo problema d'esame, tra quelli proposti dopo la modifica procedurale del 1999, in cui sia richiesto il volume di un solido ottenuto dalla rotazione di una superficie attorno all'asse *y*. La risoluzione di questo quesito è abbastanza agevole anche senza fare ricorso al metodo dei gusci cilindrici.

Basta, infatti, applicare una simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante per ottenere una nuova regione R' che ruota attorno all'asse *x* (fig. 9). Il volume generato dalla rotazione delle due regioni è, chiaramente, il medesimo dal momento che la trasformazione applicata è un'isometria.

Dopo aver applicato la simmetria indicata, la regione R' è delimitata dagli assi cartesiani e dalla funzione $g\left(x\right) = \sqrt{6 - x^2}$; otteniamo quindi:

$$V = \pi \int_0^6 \left(\sqrt{6-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^6 6 - x\, dx = \pi \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 18\pi\, u^3$$

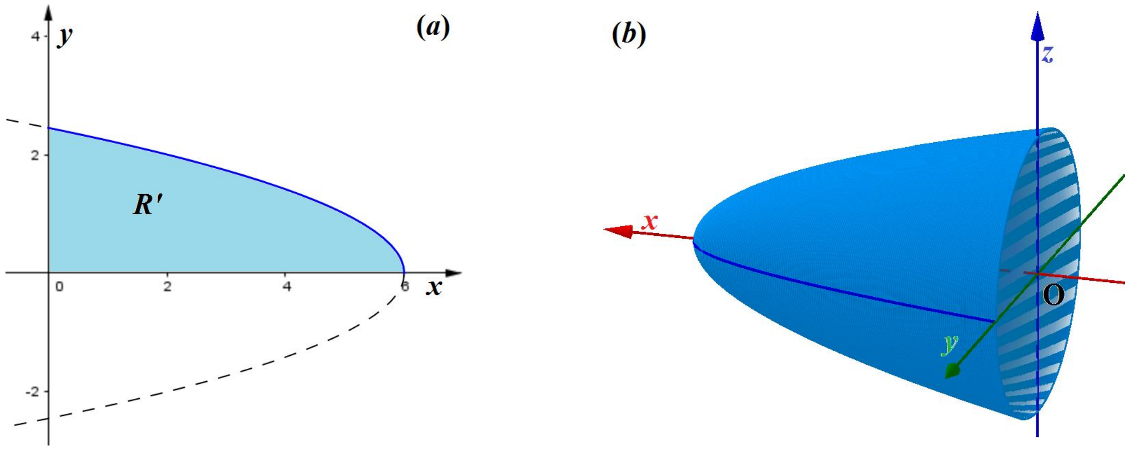


Fig. 9 – (*a*) Applicando la simmetria descritta otteniamo una nuova regione R', dalla cui rotazione attorno all'asse *x* si ottiene un solido (*b*) equivalente a quello richiesto

Vale la pena di osservare che in questa situazione non vi è un effettivo vantaggio nell'uso del metodo dei gusci cilindrici rispetto alle idee proposte nella nota, in quanto il livello di difficoltà nei calcoli è equivalente.

b) In questo caso, si tratta di calcolare il volume di un cilindro *"scavato"*, come appare evidente dall'analisi della figura 10.
Il volume della cavità si può calcolare facilmente immaginando di traslare il grafico della funzione in modo che la retta $y = 6$, asse di rotazione, risulti sovrapposta all'asse *x*. Così facendo, il volume della cavità risulta espresso da

$$V_{cav} = \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^2 dx = 2\sqrt{6}\pi\, u^3$$

e quindi il volume richiesto è

$$V = V_{cil} - V_{cav} = 36\sqrt{6}\pi - 2\sqrt{6}\pi = 34\sqrt{6}\pi\, u^3$$

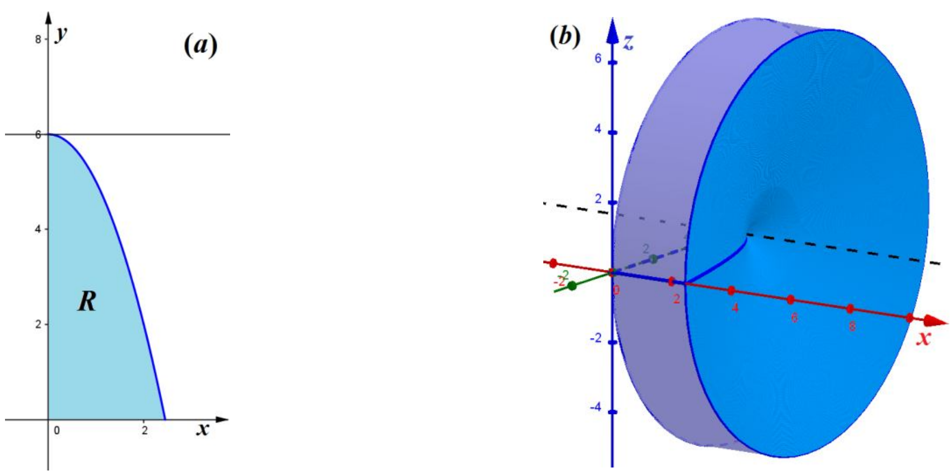


Fig. 10 – Le immagini relative alla seconda domanda del problema

4) LICEO SCIENTIFICO PNI – A.S. 2010/'11 SESSIONE ORDINARIA – Q. 3

Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalle curve $y = \operatorname{sen} x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

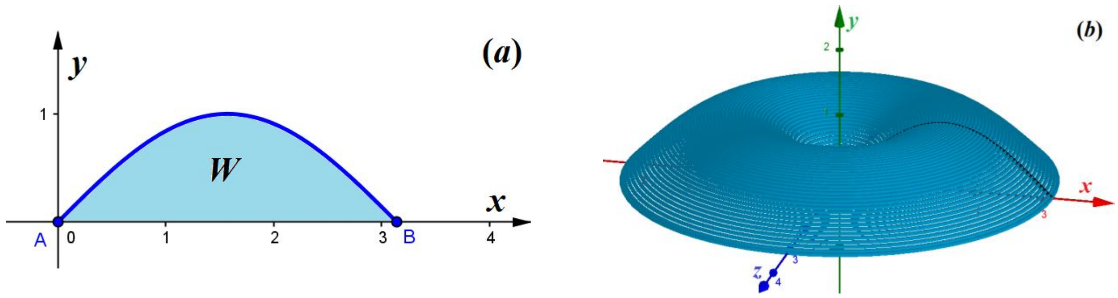


Fig. 11 – (*a*) Immagine della regione W descritta dal quesito.
(*b*) Solido ottenuto dalla rotazione di W attorno all'asse *y*.

Applicando il metodo dei gusci cilindrici, il volume cercato può essere calcolato mediante l'integrale:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$$

Integrando per parti otteniamo:

$$V = 2\pi \left[-x \cdot \cos x \right]_0^{\pi} - 2\pi \int_0^{\pi} -\cos x \, dx = 2\pi^2 + \left[\operatorname{sen} x \right]_0^{\pi} = 2\pi^2 \, u^3$$

NOTA: In questo caso, a differenza di quanto detto prima, l'applicazione del metodo dei gusci cilindrici ci aiuta a sviluppare calcoli più semplici. Se avessimo voluto provare ad applicare una simmetria rispetto alla retta $y = x$, come abbiamo fatto nella nota precedente, incontreremmo una prima difficoltà già nella determinazione della funzione che definisce la regione di piano da far ruotare attorno all'asse *x*.

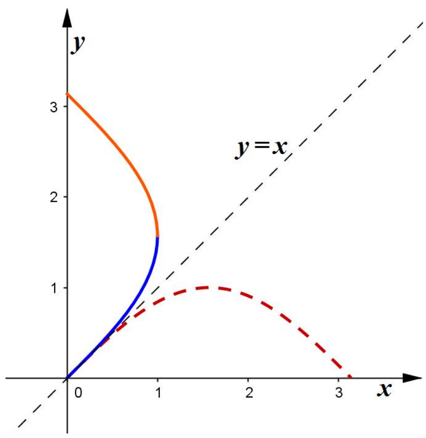


Fig. 12 – La regione W in una simmetria assiale

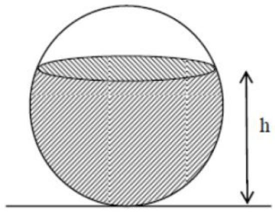
La figura 12 mostra, infatti, che sarebbe necessario *costruire* il volume cercato come differenza tra i volumi dei solidi generati dalla rotazione di due distinti archi di curva, la cui espressione analitica non è comunque facile da definire, per non parlare, poi, delle difficoltà insite nel calcolo integrale, che non riportiamo.

CONCLUSIONI

Per concludere, vorrei presentare la soluzione del quesito n. 3 dell'Esame di Stato 2016, proposta da una mia studentessa (di cui riporterò solo il nome e le iniziali del cognome, per ovvi motivi di riservatezza). Ecco il testo del quesito:

Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da

$$V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$$



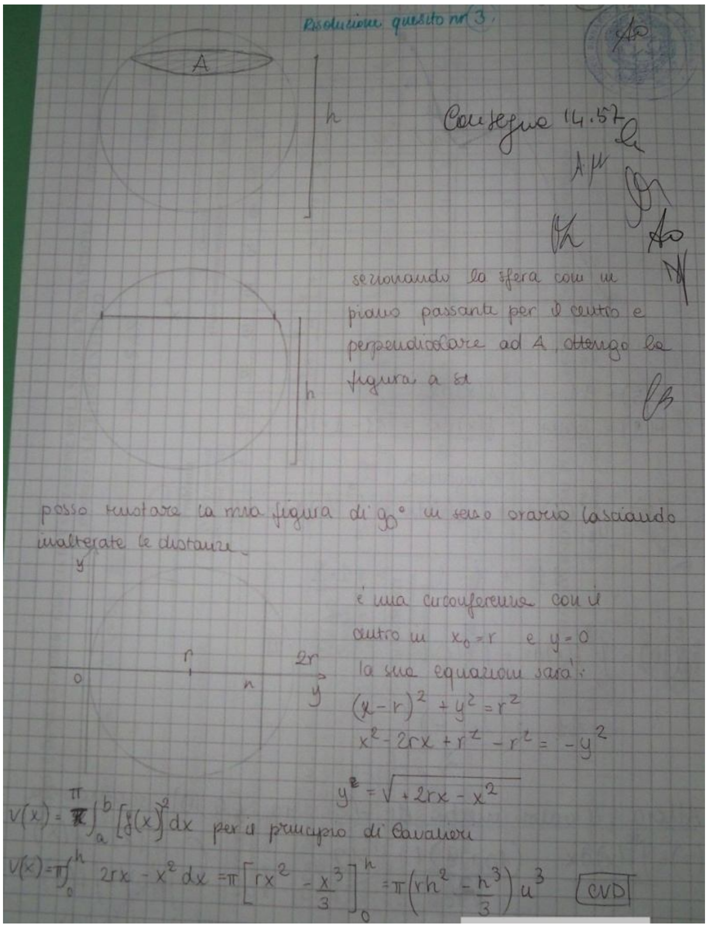
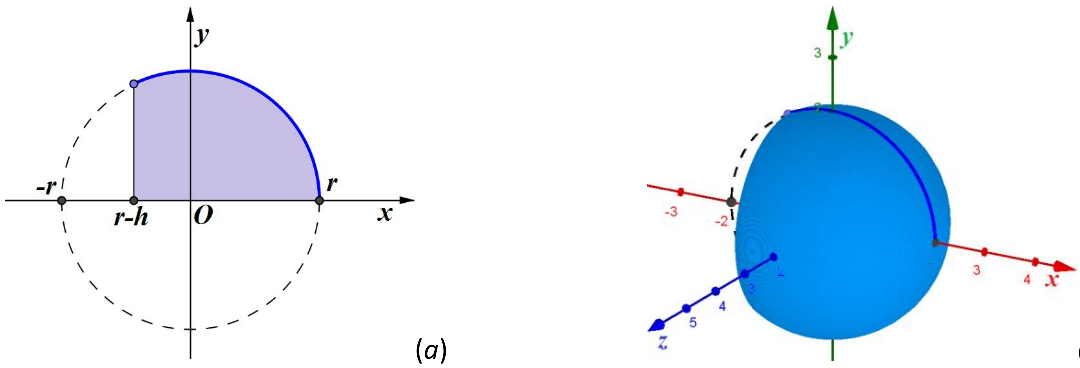


Fig. 13 – Soluzione proposta da Beatrice D.B.

È interessante osservare, a questo punto, che la soluzione proposta da Beatrice non pone, come potrebbe venir spontaneo, il centro della circonferenza nell'origine del riferimento. Questo accorgimento comporta calcoli più agevoli. Infatti, considerando la circonferenza di centro O e raggio *r* (fig. 14*a*), il solido sarebbe ottenuto dalla rotazione dell’arco di curva definito dalla funzione $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ nell’intervallo $[r-h, r]$ attorno all’asse *x* (fig. 14*b*).



(*a*) (*b*)

Fig. 14 – Soluzione alternativa

In questo caso, però, il calcolo dell’integrale avrebbe presentato qualche complicazione in più:

$$V=\pi\int_{r-h}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r}=\pi\left[r^3-\frac{r^3}{3}-\left(r^3-r^2h-\frac{\left(r-h\right)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\pi\left[r^3-\frac{r^3}{3}-r^3+r^2h+\frac{r^3-3r^2h+3rh^2-h^3}{3}\right]=\ldots=\frac{\pi}{3}\left[rh^2-h^3\right]$$

Fa sicuramente piacere notare che il percorso didattico, svolto corredando le formule con opportune dimostrazioni ed esempi, porta gli studenti a ragionare in modo autonomo ed a trovare vie efficaci per risolvere i problemi proposti, cosa che solitamente non accade se ci si limita a fornire formule e procedure da applicare, senza chiarire a sufficienza quali siano le idee da cui traggono origine.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] C. Boyer, *“Storia della matematica”*, Oscar Mondadori, Farigliano (CN), 1990

[2] Castelnuovo E., *«È possibile un’educazione al “saper vedere” in matematica?»*. In: Bollettino U.M.I., vol. XXII (1967), pp. 539 – 549

[3] Battaia L., *“Tutti i temi degli esami di stato”*, http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.htm

[4] Anzellotti G., Fico E., Ricci R., Tomasi L., *"La matematica nell’esame di stato conclusivo del secondo ciclo di istruzione"*, http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/12/Tav.rotonda-Tomasi.pdf

[5] Ambrisi A., *“Le applicazioni degli integrali al calcolo di aree e volumi nelle prove di maturità”*, http://www.matmedia.it/Esami%20di%20Stato/2011/mathesis_02-2011_43_48.pdf

[6] Beltramino A., Chimetto M. A., *"Esame di Stato 2011. Seconda prova scritta per i licei scientifici a indirizzo sperimentale (PNI)"*, Archimede, 4 (2011), Le Monnier

[7] Meneghini L., *"Esame di Stato 2012. Seconda prova scritta per il liceo scientifico di ordinamento"*, Archimede, 4 (2012), pp. 174 – 186, Le Monnier

[8] Bergamini M., Trifone A., Barozzi G., *“Matematica.blu 2.0”*, vol. 5, Zanichelli Ed.