EUCLIDE
GIORNALE DI MATEMATICA PER I GIOVANI

# *La matematica egizia*

***Jacopo Giaconi**,*

*classe 2^ Liceo Scientifico “Amedeo di Savoia Duca d’Aosta, Pistoia*

## <u>**Egitto**</u>

### **Il contesto storico e culturale**

La civiltà egizia fu una delle più longeve dell’antichità e si sviluppò a partire dal 3000 a.C. con la mitica unificazione dell’Alto Egitto (più interno) e del Basso Egitto (verso la foce del Nilo) ad opera del faraone Menes I detto anche Narmer. Sebbene tracce di un primo insediamento umano nella regione risalgano al Neolitico, si considera questo evento come nascita della civiltà nilotica che terminerà dopo tre lunghi millenni con la battaglia di Azio del 31 a.C. e la conseguente annessione a Roma. Si è soliti suddividere la storia dell’Egitto in grandi periodi, come l’Antico (indicativamente 2500-2100 a.C.), il Medio (2000-1600 a.C.) e il Nuovo Regno (1500-1000 a.C.), caratterizzati da momenti di stabilità e intervallati invece dai cosiddetti periodi intermedi durante i quali vi era, ad esempio, una rottura dell’unità politica, l’invasione di popoli stranieri (come gli Hyksos) o una crisi culturale.
La società egizia era organizzata in modo gerarchico con a capo il faraone che era considerato una divinità. Al vertice della piramide sociale vi erano poi i nobili e i sacerdoti che conoscevano la scrittura, mentre alla base stavano i commercianti, gli artigiani, i contadini e infine gli schiavi. Gli Egizi ebbero per lo più un’organizzazione politica e sociale alquanto conservatrice, con la popolazione suddivisa in caste chiuse, che si modificò ben poco rimanendo pressoché immutata per trenta secoli.

La lingua egiziana fu espressa con diversi sistemi di scrittura, tra cui il geroglifico (letteralmente “segno sacro inciso” o “scultura sacra”) che aveva come supporto principale, oltre alla pietra, i fogli di papiro. Tale scrittura fu decifrata dal giovane studioso francese Champollion solo in seguito al ritrovamento nel 1799 della famosa stele di Rosetta con inciso un testo in geroglifico, demotico e greco.

## Matematica

### La numerazione geroglifica

Gli Egizi svilupparono, oltre alla scrittura, una matematica molto originale. Una delle più antiche testimonianze è la mazza di Narmer, le cui incisioni mostrano un bottino di 120.000 prigionieri, 400.000 tori e 1.422.000 capre. Gli studiosi hanno ricavato numeri così precisi semplicemente analizzando i segni presenti sul reperto che rappresentavano quantità ben definite. Infatti la numerazione geroglifica egiziana, risalente almeno a 5000 anni fa, era basata su un sistema decimale e faceva uso di uno schema iterativo e di simboli distinti per ciascuna delle prime potenze del dieci, pertanto risulta facilmente comprensibile.

| **Simbolo** | **Valore corrispondente** |
|---|---|
| trattino verticale | 1 |
| archetto o ferro di cavallo | 10 |
| spirale | 100 |
| fiore di loto | 1 000 |
| dito piegato | 10 000 |
| girino | 100 000 |
| uomo inginocchiato | 1 000 000 |
| Sole a raggi | 10 000 000 |

Sebbene nella mazza di Narmer le cifre siano collocate in maniera non molto ordinata (come permette, d’altra parte, il sistema additivo, ampiamente utilizzato nell’antichità), col passare del tempo acquisirono un maggior rigore nella disposizione. Questo elemento sembrerebbe preannunciare una numerazione di tipo posizionale che richiede un simile accorgimento, tuttavia gli Egizi non vi arrivarono mai.

### Tecniche di calcolo

Le tabelline entrano a far parte del nostro percorso di studi matematici a partire dai primi anni della scuola elementare e ormai sono considerate da tutti la base indispensabile per qualunque tipo di istruzione superiore, ma anche necessarie nella vita di ogni giorno a partire proprio dall’infanzia. Nonostante ciò,

gli Egizi riuscirono a costruire le piramidi e a compiere calcoli astronomici senza conoscere né ricordare le tabelline, ma semplicemente moltiplicando per 2 ed eseguendo una somma. Gli Egizi facevano le moltiplicazioni e le divisioni riducendosi al sistema binario, benché adottassero una base di numerazione decimale. Il loro sistema fu largamente adottato fino a tutto il Medioevo.
Ad esempio, per moltiplicare 21 (I termine) per 37 (II termine) procedevano nel seguente modo.
Innanzitutto mettevano su una colonna le potenze del 2 minori del primo numero e accanto i corrispondenti raddoppi del secondo numero. Generalmente utilizzavano come primo termine il numero minore e come secondo quello maggiore.

| **Potenze di 2 minori del I termine** | **Raddoppi del II termine** |
|---|---|
| 1 | 37 |
| 2 | 74 |
| 4 | 148 |
| 8 | 296 |
| 16 | 592 |

Successivamente consideravano le potenze di 2 che sommate fra loro davano il I termine. Infine il prodotto si otteneva sommando i corrispondenti raddoppi del II termine.

21 = 16 + 4 + 1
21 x 37 = (16 + 4 +1) x 37 = 37 + 148 + 592 = 777

Per la divisone eseguivano un procedimento analogo tramite la duplicazione del divisore.
Per dividere 132 (I termine) per 11 (II termine) procedevano con i seguenti passaggi.

| **Potenze di 2** | **Raddoppi del II termine minori del I termine** |
|---|---|
| 1 | 11 |
| 2 | 22 |
| 4 | 44 |
| 8 | 88 |

132 = 88 + 44
132 : 11 = (88 + 44) : 11 = 4 + 8 = 12

Dunque gli Egizi per eseguire moltiplicazioni e divisioni si riducevano a serie di addizioni e sottrazioni, ovvero a operazioni che risultavano estremamente semplici. Per sommare fra loro due o più numeri, infatti, era sufficiente unire i simboli dello stesso valore (archetti, spirali, girini…) ed eventualmente, nel caso in cui il numero totale di segni dello stesso tipo fosse superiore al dieci, convertirli nel simbolo dell'ordine di grandezza superiore. Allo stesso modo per calcolare una differenza si sottraevano i simboli corrispondenti e quando ciò non fosse stato possibile si scalava un segno di ordine superiore sostituendolo con i simboli della grandezza inferiore.

**Le frazioni egizie**

I numeri razionali assoluti furono i primi ad essere riconosciuti ed utilizzati dopo i numeri naturali. Il concetto di frazione, sebbene ancora primitivo, è accertato presso gli Egizi. Essi utilizzavano solamente le unità frazionarie, cioè le frazioni con numeratore 1 che venivano rappresentate con i loro normali simboli numerici sormontati da un segno ovale allungato, come una bocca, a indicare una «parte» dell'intero. Solo nella notazione ieratica dei papiri l'ovale viene sostituito da un puntino. Unica eccezione al suddetto sistema era la frazione 2/3 con la quale gli Egizi sembravano sentirsi a proprio agio e che rappresentavano con un segno specifico. Tuttavia alcuni studiosi ritengono che talvolta utilizzassero anche segni particolari per indicare le frazioni della forma n/(n+1) più comuni, cioè per alcuni complementi di frazioni unitarie.
Per considerare ulteriori rapporti fra numeri interi, nella matematica egizia si ricorreva a ridurli a somme di inversi di numeri interi. A tal proposito un esempio emblematico è il cosiddetto occhio di Horus, le cui parti rappresentano gli inversi delle prime sei potenze di 2. A questo simbolo magico-religioso è legata una leggenda sull'origine delle frazioni nell'Antico Egitto.
Il dio-falco Horus, figlio di Iside e di Osiride, per vendicare la morte del padre, ucciso dal fratello Seth, decise di affrontare lo zio in duello. Durante lo scontro però Horus perse un occhio che cadde in pezzi nelle acque del Nilo. Il dio della giustizia Toth riuscì a ritrovare e a ricomporre i frammenti restituendo l'occhio a Horus. Le parti di questo simbolo assunsero un significato importante perché vennero adottate come frazioni dell'hekat, unità di misura assunta in particolare per i volumi dei materiali secchi, come cereali, grano e orzo.
Se sommiamo tutte le frazioni corrispondenti alle varie parti dell'occhio del dio, ci accorgiamo che manca una parte per arrivare all'intero. Infatti

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 = 63/64
1 – 63/64 = 1/64

La parte mancante, 1/64, era stata persa nel Nilo durante lo scontro, ma non era stata recuperata. Si narra che Toth la ricreò per restituirla a Horus, il quale poté finalmente completare il suo occhio divino e porre fine a una serie di lunghi scontri familiari.

**Il Papiro di Rhind**

Abbiamo visto che gli Egizi utilizzavano frazioni aventi al numeratore l'unità anche per scomporre come somma di più addendi le altre frazioni. Un simile processo non sempre era facile o immediato e molto spesso si ricorreva all'utilizzo di tabelle e manuali di consultazione redatti dai matematici del tempo. Un esempio si incontra nel Papiro di Rhind, il più importante documento pervenutoci riguardo alla storia della matematica egizia. Si tratta di un reperto largo 30 cm e lungo 5,46 m e conservato attualmente al British Museum di Londra (ad eccezione di alcuni piccoli frammenti che si trovano a New York al Brooklyn Museum). È opera dello scriba Ahmes vissuto nella metà del XVII secolo a.C. e per questo viene talvolta indicato come Papiro di Ahmes. Tuttavia l'autore ci informa subito che il contenuto è stato tratto da un altro esemplare risalente al Medio Regno e composto probabilmente tra il 2000 e il 1800 a.C. L'altro nome con cui è conosciuto il papiro si deve all'antiquario scozzese Henry Rhind che nel 1858 lo trovò e lo acquistò in un mercato di Luxor, l'antica Tebe, in Egitto. Ahmes non utilizza i caratteri geroglifici, ma la scrittura ieratica, più agile e adatta all'utilizzo di inchiostro su fogli di papiro, nella quale i numeri da 1 a 9 e alcuni multipli del 10 si rappresentano con particolari segni in modo da ridurre il sistema ripetitivo visto precedentemente.
Si ritiene che questo documento avesse un carattere didattico con particolare importanza alle applicazioni pratiche. Infatti il papiro si apre con una tabella di conversione, a cui abbiamo accennato, delle frazioni del tipo $2/n$ con $n$ numero dispari compreso tra 5 e 101. Poco dopo si incontra un'altra tabella più breve con le frazioni della forma $n/10$ ($1 \leq n \leq 9$) e seguono 84 problemi che oggi definiremmo di tipo aritmetico, algebrico e geometrico con le relative soluzioni.

**Alcuni problemi dal Papiro di Rhind**

I primi sei problemi chiedono di dividere fra dieci uomini rispettivamente uno, due, sei, sette, otto e nove pagnotte utilizzando la tavola di conversione delle frazioni del tipo $n/10$ appena fornita. A un solutore moderno i metodi utilizzati da Ahmes appaiono alquanto complessi se paragonati alle pratiche oggi comuni e almeno a una prima lettura possono sembrare quasi incomprensibili. Ad esempio, nel problema n. 4 per dividere 7 pani tra 10 persone noi indicheremmo la soluzione con la frazione 7/10 o, per rispettare la consuetudine egizia, come 1/2 + 1/5, ma il metodo adottato da Ahmes è del tutto diverso. Egli, probabilmente a causa della sua predilezione per 2/3, immagina di dividere ciascun pa-

ne in 2/3 e 1/3 in modo da ottenere dieci 2/3 e 1/3 che divisi tra tutti gli uomini danno 2/3 +1/30 per ognuno.
Nel problema n. 21 viene trovata la frazione (o meglio la somma di frazioni) 1/5 + 1/15 che "completa 2/3 e 1/15 a 1". Possiamo facilmente verificare questa soluzione risolvendo l'equazione $1 = 2/3 + 1/15 + x$.
Fra i problemi classificabili come algebrici rientrano quelli che Ahmes risolve mediante un procedimento oggi noto come metodo della falsa posizione. In questi casi è richiesto di risolvere l'equivalente di equazioni della forma $x + ax = b$ o anche $x + ax + bx = c$ con l'incognita indicata dal termine «aha» traducibile con «mucchio». Un esempio è il problema n. 25: *qual è il valore del mucchio, se il mucchio sommato alla sua metà diventa 16?* Il metodo della falsa posizione consiste nell'attribuire un valore qualsiasi al «mucchio», che con molta probabilità non sarà corretto, ed eseguire con questa quantità assunta le operazioni alla sinistra del segno dell'uguale. Il risultato ottenuto andrà poi confrontato con quello reale e attraverso alcune proporzioni, con una serie di operazioni di correzione, si otterrà la soluzione. Nel problema precedente, si attribuisce al «mucchio» il valore 2 che sommato alla sua metà dà come risultato 3.

*mucchio* + 1/2 *mucchio* = 16
2 + 1 = 3 e non 16

Il passo seguente consiste nel trovare, mediante una proporzione, il valore da attribuire all'incognita per ottenere 16. In termini moderni

$2 : 3 = x : 16$
$x = 32/3 = 10 + 2/3$

Il metodo della falsa posizione fu utilizzato anche dagli Arabi e nel corso del Medioevo passò nella cultura europea, soprattutto grazie al contributo del matematico Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che nel capitolo 12 del Liber abbaci («Libro del calcolo») propone la soluzione di problemi tramite il procedimento analizzato. Egli lo introduce così: *C'è poi anche un altro metodo di cui ci serviamo, vale a dire quello di mettere al posto della cosa ignota un numero noto, scelto a piacere, che sia divisibile senza resto per le frazioni che compaiono nel quesito. E, in base alla formulazione del problema, grazie al numero che avete ipotizzato potete scoprire la proporzione che vi permette di trovare la risposta al quesito*.
Tra i vari esercizi pratici, presumibilmente per giovani studenti, compaiono anche alcuni giochi e indovinelli di carattere matematico, come il problema n. 79 nel quale Ahmes si limita a citare «7 case, 49 gatti, 343 topi, 2401 spighe di far-

ro, 16.807 misure di grano». Gli studiosi ipotizzano che lo scriba alludesse a una sorta di filastrocca, forse abbastanza celebre all'epoca, riproposta qui sotto.

*Ci sono 7 case e ogni casa ha 7 gatti.*
*Ogni gatto mangia 7 topi*
*E ogni topo avrebbe mangiato 7 spighe di grano*
*E ogni spiga avrebbe prodotto 7 hekat* (misure) *di grano.*
*Quale numero si ottiene aggiungendo case, gatti, topi, spighe e hekat?*

Il problema è riportato anche da Fibonacci, sempre nel Liber abbaci, nella seguente versione.

*Ci sono 7 vecchie in viaggio per Roma*
*Ognuna di esse ha 7 muli*
*Ogni mulo porta 7 sacchi*
*Ogni sacco contiene 7 pagnotte*
*In ogni pagnotta ci sono 7 coltelli*
*Ogni coltello è in 7 foderi*
*Donne, muli, sacchi, pagnotte, foderi,*
*In quanti viaggiano per Roma?*

Anche in Italia vi è una filastrocca simile.

*Per una strada che mena a Camogli*
*passava un uomo con 7 mogli.*
*E ogni moglie aveva 7 sacche.*
*E in ogni sacca aveva 7 gatte.*
*E ogni gatta 7 gattini.*
*Fra gatti e gatte, e sacche e mogli,*
*in quanti andavano, dite, a Camogli?*

È un genere popolare in varie culture, dalla tradizione ebraica fino a quella italiana che sembra proporlo in canzoni come Alla fiera dell'est (1976) di Branduardi o in altre filastrocche, ad esempio La storia di Petruzzo. Per il mondo inglese il seguente Enigma di St. Ives ne è un esempio.

*As I was going to St. Ives*
*I met a man with 7 wives.*
*Each wife had 7 sacks,*
*Each sack had 7 cats,*
*Each cat had 7 kits;*
*Kits, cats, sacks and wives,*
*How many were going to St. Ives?*

Vediamo adesso le relative soluzioni. Il problema n. 79 di Ahmes può essere risolto sommando tra loro le prime cinque potenze di 7 (si tratta di una progressione geometrica di ragione 7).

$7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19\ 607$

Per il quesito del matematico pisano la risposta «a prima vista» potrebbe essere, in modo analogo al precedente, la somma delle prime sei potenze del 7. Tuttavia a una lettura più attenta ci accorgiamo facilmente che non è richiesta la somma dei coltelli e pertanto è necessario sottrarre dalla somma trovata (137.256) la quinta potenza del 7.

$7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^6 = 137\ 256 – 7^5 = 120\ 449$

La filastrocca italiana e quella inglese hanno la stessa soluzione che è presentata di seguito.

$7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2801$

Bisogna precisare però che questi ultimi problemi si prestano a più interpretazioni e soprattutto per l'Enigma di St. Ives alcuni propongono una risposta differente che presentiamo comunque per correttezza. Fanno notare giustamente, infatti, che è richiesto solo *How many were going to St. Ives?* e perciò la risposta corretta sarebbe semplicemente 1.

**Il Papiro di Mosca**

La maggior parte delle informazioni sulla matematica dell'Antico Egitto proviene in modo particolare dal Papiro di Rhind di cui abbiamo parlato, ma anche da altre fonti che, sebbene di minore importanza, contribuiscono a delineare un quadro storico per lo meno esaustivo del pensiero matematico degli antichi abitanti delle rive del Nilo. Tra queste vi sono il Papiro di Kahun, conservato a Londra, un Papiro di Berlino e alcuni altri, tra cui un importante papiro risalente agli inizi del XIX secolo a.C. e conosciuto come Papiro di Goleniščev (in onore del suo primo possessore) o di Mosca. È largo 7,5 cm e lungo circa 5,5 m e fu scritto da uno scriba a noi sconosciuto della XII dinastia. La maggior parte dei problemi che vi compaiono, 25 in tutto, non sono molto diversi da quelli del papiro di Rhind, ad eccezione del n. 14 e del n. 10. Il primo è costituito dall'immagine di un trapezio corredata da alcuni numeri con a fianco dei calcoli che hanno permesso di capire che rappresenta in realtà un tronco di piramide quadrata di cui si mostra il metodo per calcolarne il volume. Il problema n. 10, invece, è più impegnativo e il risultato ottenuto risulterebbe addirittura stupefacente se si considerano le conoscenze dell'epoca. Il problema chiede di calcolare l'area di una superficie curvilinea dall'aspetto di un cesto. Tuttavia in seguito a studi più recenti è stata formulata l'ipotesi che il cesto sia in realtà un tetto e ciò renderebbe più semplici i calcoli. Il testo purtroppo non è molto chiaro e possiamo solo limitarci ad affermare che si tratta di una delle più antiche valutazioni, forse la prima, dell'area di una superficie semisferica.

**Una riflessione sulla storia della matematica (egizia)**

Nell'ambito dell'insegnamento della matematica e delle discipline ad essa connesse, lo studio della storia della matematica sembra ricoprire un ruolo generalmente secondario. Se da una parte si moltiplicano i corsi mirati ad approfondire o ad affrontare alcuni argomenti che per limiti oggettivi di tempo non possono essere trattati completamente o adeguatamente in classe, d'altra parte attività incentrate sull'analisi delle fasi storiche dello sviluppo della matematica sembrano tardare ad affermarsi. In ogni modo si deve ricordare che alcuni centri di ricerca, soprattutto universitari, stanno proponendo una serie di progetti nelle scuole per offrire agli alunni alcuni elementi di storia della matematica, o almeno per verificare se ciò sia possibile, ma non è abbastanza. A tal proposito, comunque, si ricorda un'iniziativa promossa e curata dal centro territoriale per la didattica della matematica di Trento che ha visto impegnati gli alunni del primo biennio della scuola superiore in un test sulle conoscenze di storia della matematica. Anche alcune associazioni si occupano della diffusione e dello studio della materia in questione, come la Società Italiana di Storia delle Matematiche (SISM) o il centro PRISTEM (Progetto RIcerche STrorhe E Metodologiche).
Il problema è stato affrontato anche a livello di programmi ministeriali in modo da inserire dei concetti essenziali all'interno delle Indicazioni Nazionali riguardanti gli Obiettivi specifici di apprendimento, ad esempio, per il Liceo Scientifico di seguito riportate.
Fra le linee generali e le competenze di matematica previste alla fine del percorso di studi è scritto: «lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica».

Nonostante i buoni propositi delle Indicazioni Nazionali, sembra che non siano molti gli istituti nei quali vengono fornite le conoscenze essenziali per «inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e per comprenderne il significato concettuale» (dalle Linee Generali per la matematica del suddetto documento). Inoltre è bene sottolineare che fra gli obiettivi sono citati solo alcuni periodi, indubbiamente importanti, ma che rischiano di sostituirsi alle ben più ampie fasi di sviluppo del pensiero matematico che, per il genere umano, ha origine in un tempo talmente antico da essere difficile anche solo da immaginare. In ogni modo è doveroso ricordare che lo stesso Lucio Lombardo Radice, importante matematico italiano del secolo scorso, pubblicò nel 1971 un'opera scritta con un linguaggio semplice, accessibile a tutti e soprattutto agli adolescenti, dal titolo "La matematica da Pitagora a Newton", nella quale parte, come afferma Carlo Bernardini nell'introduzione a una recente edizione del libro, dallo sbalordimento che può provocare il pensiero pitagorico, per approdare al linguaggio evoluto di Newton che è molto simile a quello ancora oggi usato. Dunque nello studio e nell'insegnamento, ad eccezione di quello specialistico, della storia della matematica (ma anche di quella dell'arte, della musica…) si tende a tralasciarne gli aspetti più antichi partendo, quasi convenzionalmente, dalla civiltà greca, come evidenziato dal titolo del libro appena citato. Eppure sia Erodoto sia Aristotele, pur avendo opinioni differenti, erano concordi sul far risalire l'origine della matematica (e in particolare della geometria) alla civiltà egiziana, sebbene questa disciplina avesse origini ben più antiche. Inoltre, con molta probabilità, i Greci appresero qualche nozione di matematica elementare proprio dagli Egizi, poiché l'utilizzo di frazioni unitarie perdurò per molto tempo in Grecia e anche a Roma. Per questi motivi lo studio della matematica egizia può essere considerato come valido punto di partenza per un'esplorazione più ampia nello sviluppo storico delle scienze matematiche, pur riconoscendo l'esagerata eredità nella cultura greca che si è attribuita a lungo ed erroneamente alla civiltà delle rive del Nilo. Infatti la matematica egizia, seppure i papiri di Ahmes e di Mosca risalgano a un periodo molto antico, rimase perlopiù immutata nel corso della sua lunga storia, con un approccio di natura pratica anziché incentrato sulla ricerca di completezza e profondità concettuale e con una geometria alquanto simile a una branca dell'aritmetica applicata. Pertanto, nonostante possa apparire a prima vista complessa, la matematica degli antichi Egizi può essere la base, proprio perché priva di concetti particolarmente difficili, per avventurarsi nella storia di questa disciplina senza dover essere "esperti del settore". Perché se avere nozioni di storia della matematica può aiutare a conoscerla, comprenderla è la premessa immancabile per apprezzarla e, forse, anche per amarla.

**Riferimenti bibliografici**


- Carl Benjamin Boyer, *Storia della matematica*, 1976, cap. 2 *L'Egitto*.
- Piergiorgio Odifreddi, *Il museo dei numeri*, 2014, pag. 35-38 e 294-296.
- Federico Peiretti, *Il matematico si diverte*, 2010, cap. 1, pag. 13-18 e 26-29.
- Maria Cristina Guidotti, *La scrittura geroglifica*, 2002.
- Leonardo Sasso, *Nuova matematica a colori. Algebra 1*, 2011, pag. 90.
- Keith Devlin, *I numeri magici di Fibonacci*, 2012, pag. 99-102.
- G. Dorfles, M. Ragazzi, M. G. Recanati, *Arte, artisti, opere e temi 1*, 2010, pag. 36-37.
- Aristide Malnati, *Matematica faraonica*, da *Mate* n. 3, luglio 2016, pag. 52-55.
- Wikipedia, *Unità di misura egizie*.
- Wikipedia, *Papiro di Rhind*.
- Wikipedia, *Metodo di falsa posizione in Fibonacci*.
- Wikipedia, *Papiro di Mosca*.
- Wikipedia, *As I was going to St Ives*.
- http://online.scuola.zanichelli.it/bergamini-files/Biennio/Esplorazioni/Esp_07_papiro.pdf.
- http://www.dm.uniba.it/ipertesto/egiziani/rhind, *Il papiro di Rhind*.
- http://www.uni-ateneo.it/prog_cor/2010-2011/lez_10-11/2011-03-24_lez1-ore17.pdf.
- Gianfranco Bo, http://utenti.quipo.it/base5/numeri/ahmesgatti.htm, *I gatti di Ahmes*.
- Iprase, http://try.iprase.tn.it/prodotti/materiali_di_lavoro/matematica/test_di_storia.asp.


N.B. Il paragrafo "Il contesto storico e culturale" relativo all'Antico Egitto è stato redatto anche rielaborando gli appunti delle lezioni dei professori Alessandro Bonacchi (Storia) e Andrea Lunardi (Storia dell'Arte).