

UNA NOTEVOLE PROPRIETA' DEI POLIGONI REGOLARI

segnalata dal Prof. Luigi Campedelli
dell'Università di Firenze

Il prof. Campedelli, in data 10 marzo, mi ha scritto: "Carissimo professore, lavorando intorno ad una tesi di laurea mi è capitato di osservare una proprietà dei poligoni regolari che mi sembra interessante. È certamente nota, ma non ho avuto il tempo di rintracciarla.

Ecco di cosa si tratta:

a) Da ogni vertice di un poligono regolare di n lati, escono *due* lati e $n-3$ diagonali: la somma dei quadrati di queste $n-1$ segmenti è uguale a $2n$ volte il quadrato del raggio del cerchio circoscritto al poligono.

La proposizione a) rientra in un'altra più generale.

b) Dati sopra un cerchio W , n punti

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$$

se il loro baricentro cade nel centro O di W , la somma dei quadrati delle distanze dei punti A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) da un qualunque punto A di W è uguale a $2n$ volte il quadrato del raggio del cerchio W . Cioè

$$(1) \quad \overline{AA_1}^2 + \overline{AA_2}^2 + \dots + \overline{AA_n}^2 = 2n \cdot \overline{OA}^2$$

Ricorro a coordinate cartesiane ortogonali con l'origine in O .

Posto $A = (x, y)$, $A_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dal fatto che è O il baricentro dei punti A_i segue:

$$(2) \quad \sum x_i = 0, \quad \sum y_i = 0.$$

Il primo membro della (1), tenendo conto della (2), si scrive:

$$(3) \quad \sum \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} = n(x^2 + y^2) + \sum (x_i^2 + y_i^2),$$

e quindi appunto la (3) dà:

$$\sum \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} = 2nr^2,$$

poiché, detto r il raggio del cerchio W , risulta:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x_i^2 + y_i^2 = r^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ciò premesso, per giungere alla proporzione a), basta tener conto del fatto che i vertici di un poligono regolare hanno il baricentro nel centro del cerchio circoscritto, e quindi vale la b) che si riduce alla a) facendo coincidere il punto A con uno dei vertici del poligono considerato.

La b) è suscettibile di varie generalizzazioni.

Se questa mia le può essere utile, per la fatica che dedica al suo "Angolo acuto" ne sarò molto lieto. Con viva cordialità".