Verso l'infinito ed oltre.
Un percorso ad ostacoli da Pitagora ai giorni nostri

Lorenzo Meneghini

> *«L'infinito!*
> *Nessuna altra idea ha turbato tanto profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così proficuamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito.»* **David Hilbert** (1862 – 1943)

Vorrei iniziare questa riflessione sul concetto di infinito con le parole di uno dei grandi della matematica del secolo scorso, perché esprimono in modo sorprendentemente sintetico e chiaro l'essenza di queste note.
Il mio obiettivo è quello di tracciare un percorso attraverso la storia del pensiero occidentale, analizzando in modo critico le difficoltà che l'Uomo ha incontrato nel suo "riflettere intorno all'infinito" (come avrebbe detto Galileo). Lo faremo tramite frequenti "salti" di epoca storica, cercando di chiarire ciò che oggi i matematici sanno relativamente a problemi posti nel passato.

La scuola pitagorica
Pitagora (500 a. C.) abbandonò presto la sua patria per motivi politici, e si trasferì a Crotone. Lì fondò la famosa scuola pitagorica, per approfondire gli studi di matematica, filosofia e musica.
Senza voler entrare nel dettaglio sulla suddivisione interna alla setta iniziatica dei pitagorici, ci limitiamo ad osservare che fu proprio il *"Teorema di Pitagora"* a dare il via alla profonda "crisi dei fondamenti della geometria greca".
Per riuscire a capirne la ragione dobbiamo provare ad analizzare il famoso teorema[1], che afferma che *in ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti* (vd. Fig. 1a).

[1] In realtà questo teorema era già noto agli antichi Egizi, che lo usavano in casi particolari per la suddivisione dei terreni dopo le esondazioni del Nilo e, pare, prima ancora in Cina.

Per quale motivo questa proprietà dei triangoli rettangoli ha scosso alla base il pensiero matematico dell'epoca?
Sicuramente, fintanto che si considerano triangoli rettangoli particolari, i cui cateti misurino rispettivamente 3 e 4 unità, non si incontra alcuna difficoltà, poiché l'ipotenusa misura, in tal caso, 5 unità.

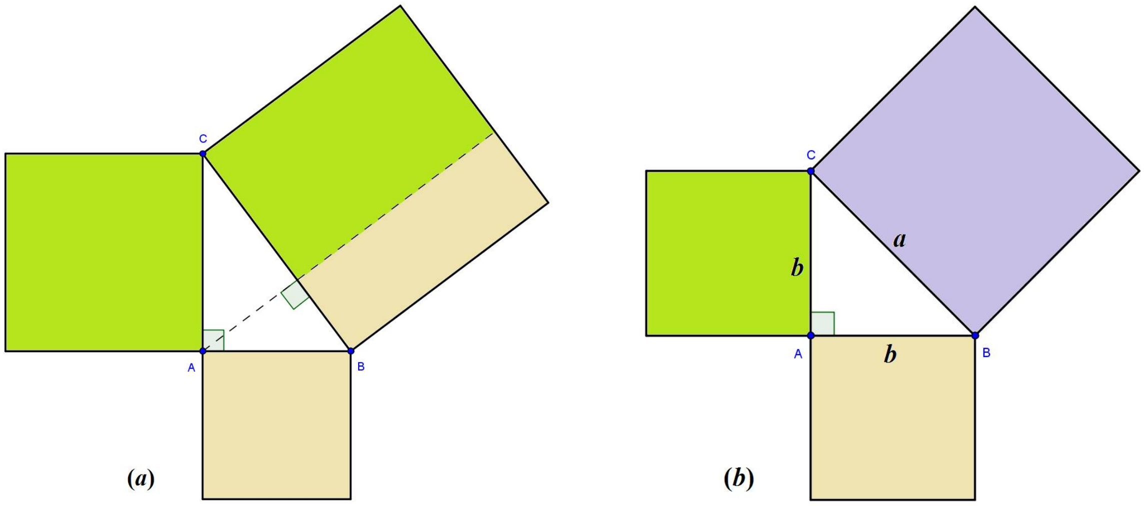

Fig. 1 – Rappresentazioni del Teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo scaleno ed isoscele; si dimostra che, in fig. (a), i poligoni con lo stesso colore sono equivalenti.

I problemi interpretativi cominciano quando si cerca di determinare la misura "esatta" della diagonale di un quadrato o, il che è equivalente, dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele (vd. Fig. 1b).
In questo caso, infatti, si ha $a^2 = b^2 + b^2$ cioè $a^2 = 2b^2$, da cui $a = b\sqrt{2}$. In particolare, poi, se il cateto b è unitario, l'ipotenusa vale $\sqrt{2}$ unità.
Se proviamo a determinarne lo sviluppo decimale applicando un qualsiasi algoritmo per il calcolo della radice quadrata otteniamo, dopo alcuni passaggi, una sequenza di cifre decimali illimitata e non periodica che inizia con

1,4142135623731…

Leggendo gli Elementi di Euclide troviamo una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che, descritta in termini moderni, suonerebbe più o meno così.

Supponiamo, per assurdo, che si tratti di un numero razionale; in tal caso esiste una coppia di numeri interi positivi e tali che $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. È lecito assumere, inoltre, che la frazione sia ridotta ai minimi termini, cioè che m e n siano primi tra loro. Elevando la precedente uguaglianza al quadrato troviamo $\frac{m^2}{n^2} = 2$, cioè $m^2 = 2n^2$, da cui deduciamo che m è pari[2], e quindi esiste un numero naturale k tale che $m = 2k$. Sostituendo nella relazione precedente si ottiene $4k^2 = 2n^2$, da cui si deduce che $n^2 = 2k^2$ e, con un ragionamento analogo al precedente, concludiamo che anche n è pari. Siamo giunti ad una contraddizione, avendo supposto che m e n siano primi tra loro. Ne concludiamo che una tale coppia di interi non esiste, cioè che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Quali sono le conseguenze dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$? La più famosa è certamente il fatto che il lato di un quadrato e la sua diagonale non hanno alcun sottomultiplo comune. Se, infatti, ve ne fosse uno, esprimendo la misura di entrambi i segmenti in funzione di questa nuova "unità di misura" il loro rapporto sarebbe un numero razionale.
Questa considerazione ci porta ad affermare il fatto che il punto è privo di dimensioni, contrariamente a quanto i matematici dell'epoca ritenevano, dall'epoca di Democrito in poi. Poiché la matematica dell'epoca era basata sull'idea che il punto avesse dimensioni finite, ciò mise in crisi profonda il pensiero matematico, al punto che per qualche tempo si cercò quindi di tenere l'informazione confinata all'interno della setta, ma leggendo Proclo[3]: *«È fama che colui[4] il quale per primo rese di pubblico dominio questa teoria sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile avrebbero dovuto rimanere sempre celati».*

I paradossi di Zenone di Elea

Meno di un secolo dopo la crisi provocata dalla Scuola Pitagorica, Zenone di Elea (450 a.C.) mise nuovamente in crisi il mondo matematico proponendo alcuni paradossi relativi al moto dei corpi, divenuti famosi grazie ad Aristotele, che ce li ha tramandati. Nella Fisica, infatti, Aristotele, parlando di Zenone, ci racconta:

> *«Quattro sono gli argomenti di Zenone intorno al movimento che offrono difficoltà di soluzione. Primo, quello sulla inesistenza del movimento, per la ragione che il mosso deve giungere prima alla metà che non al termine.*

---

[2] Se, infatti, m fosse dispari potremmo scrivere $m = 2k + 1$, per un opportuno numero intero k. Allora $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ è un numero dispari.

[3] Commentatore di opere matematiche, vissuto nel 400 d.C.

[4] Ippaso di Metaponto, uno degli allievi di Pitagora.

Il secondo argomento di Zenone è quello chiamato di Achille. Ragiona che il più lento non sarà mai raggiunto dal più veloce perché l'inseguitore deve passare per il luogo che l'inseguito ha appena abbandonato, di modo che il più lento ha sempre un certo vantaggio».

Il secondo *argomento* – come lo chiama Aristotele – è divenuto famoso come il paradosso di *Achille e la tartaruga*[5]. Lo analizzeremo leggendo quanto scrive Borges nel saggio "Metempsicosi della Tartaruga" (1931):

«Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più veloce della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille percorre dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga un millimetro; Achille il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro, e così all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla».

Proviamo ad analizzare il ragionamento in termini moderni, calcolando la lunghezza del tratto percorso da Achille, secondo la descrizione che ne fa Borges. Le distanze che dobbiamo sommare formano una progressione geometrica di termine iniziale $a_0 = 10$ e ragione $q = \frac{1}{10}$; applicando la nota relazione otteniamo:

$$S_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = 10 \cdot \frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

Passando al limite la precedente espressione per $n \to +\infty$ otteniamo la lunghezza desiderata:

$$S = \lim_{n\to+\infty} \frac{100}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{100}{9} \simeq 11{,}11\,m$$

Ad una prima analisi potrebbe sembrare corretto il ragionamento secondo cui Achille, nonostante la sua maggiore velocità, non raggiungerebbe la tartaruga, in quanto la precedente somma ha infiniti addendi. Dobbiamo osservare, però, che Achille, anche camminando alla velocità di $1\frac{m}{s}$, percorrerà distanze sempre

[5] Non è chiaro, in realtà, chi sia stato ad associare la tartaruga – tradizionale simbolo di lentezza – al più veloce Achille, visto che Aristotele non ne parla.

inferiori in tempi sempre più piccoli. Più precisamente, la successione dei tempi di percorrenza è anch'essa una progressione geometrica di termine iniziale $t_0 = 10$ e ragione $q = \frac{1}{10}$.

Anche il tempo di percorrenza è, quindi, finito, come mostra dall'esperienza quotidiana.

È interessante analizzare anche ciò che Bernhard Bolzano scriverà[6], oltre duemila anni dopo, a commento di questo ed altri paradossi sulle serie convergenti:

> *«Quantunque qualsiasi quantità, e in genere qualsiasi oggetto, che ci appaia come infinita sotto qualche aspetto, debba appunto sotto questo aspetto essere tale da poter essere considerata come una totalità costituita da un insieme infinito di parti, pure non vale l'inverso, cioè che ogni quantità che noi consideriamo come somma di un insieme infinito di altre quantità tutte finite debba a sua volta essere infinita. [...] L'apparente paradosso trae origine dal fatto che si dimentica che i termini da sommarsi diventano sempre più piccoli».*

È proprio l'ultima frase di Bolzano che consente, in questo caso, di sciogliere ogni dubbio; vi sono infatti situazioni, come quella in esame, in cui la somma di infiniti termini, tendenti progressivamente a zero, *converge* ad un valore finito[7].

È lecito chiedersi a questo punto cosa volesse comunicarci Zenone con i suoi famosi paradossi. Alcuni sostengono che Zenone volesse farci capire che se il punto avesse avuto una dimensione finita, pur se piccola, la somma degli infiniti segmenti sarebbe stata infinita, con la logica conseguenza che Achille non riuscirebbe mai a raggiungere la tartaruga, contro ogni evidenza.

L'infinito, da Aristotele al Medioevo

Parafrasando un proverbio indiano, prima di giudicare i filosofi greci, proviamo a camminare nelle loro scarpe. Se tornassimo indietro nel tempo di oltre duemila anni, potremmo percepire il mondo con i sensi e gli strumenti a nostra disposizione; ne otterremmo l'immagine di un mondo limitato, composto di oggetti finiti nello spazio e nel tempo. Non saremmo in grado di "conoscere"

[6] Citazione presente in: L. Lombardo Radice, *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma 2006, pp. 31-48

[7] Ad onor del vero, vi sono anche situazioni in cui la somma di infiniti termini non assume un valore finito, nonostante questi siano infinitesimi, come avviene ad esempio con la somma degli inversi dei numeri interi positivi, la cosiddetta *serie armonica*.

l'infinito, di averne esperienza diretta; è probabilmente per questo motivo che i filosofi dell'epoca attribuirono all'infinito una serie di valenze negative. Con l'espressione "*horror infiniti*", ovvero *paura per l'infinito*, si definì proprio questo rifiuto da parte degli antichi di considerare un *infinito attuale*, cioè qualcosa di concreto e tangibile.
Nella Fisica, Aristotele afferma che:

> «*...il numero è infinito in potenza, ma non in atto. [...] questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà, essi stessi, allo stato presente, non sentono il bisogno di infinito, ma di una quantità più grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita [...]*».

In sostanza, l'unico concetto accettato nell'antichità era quello di *infinito potenziale*, inteso come *un divenire*: un numero o una qualsiasi altra quantità può crescere indefinitamente, aumentando ogni volta di poco, ma risultando ogni volta un'entità finita. In questo viene ripresa la concezione della scuola pitagorica, secondo la quale l'*infinito* sarebbe equivalente all'imperfezione perché mai compiuto, non pienamente realizzato, come invece accade per il *finito*, cui non manca niente per essere completo.
In quest'ottica, quando Euclide scrive il I libro degli Elementi, non afferma (I Postulato) *"per un punto passano infinite rette"*, ma piuttosto *"si può condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto"*, ovvero (II Postulato) *"una retta terminata si può prolungare continuamente in linea retta"*, sottintendendo, con questo, che la retta sia una figura limitata (ciò che noi chiameremmo segmento).
Analogamente, la Proposizione 20 del libro IX degli Elementi, non afferma che i numeri primi sono infiniti, ma che sono *"più di qualsiasi moltitudine"*.
La dimostrazione fornita è molto elegante, nella sua semplicità; esaminiamola, tradotta in termini moderni.

> Supponiamo che siano in numero finito ed elenchiamoli: $p_1, p_2, ..., p_n$. Consideriamo ora il numero $P = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Questo numero è chiaramente maggiore di ciascuno di quelli già considerati; inoltre, per com'è definito, non è divisibile per alcuno di essi, in quanto la divisione da sempre resto 1. A questo punto, o P è primo oppure, se non lo è, risulta divisibile per un

numero primo che non appartiene all’insieme dato. Ciò è in contraddizione con l’ipotesi iniziale. Ne deduciamo che l’insieme dei numeri primi è infinito.

La concezione aristotelica dell’infinito potenziale, contrapposto a quello attuale, resistette a lungo, impedendo di concepire l’infinito come qualcosa di compiuto; potremmo dire che costituì un vero e proprio dogma che fu seguito fino alla fine del Medioevo. Verso il 1450 Nicola Cusano introdusse per primo il concetto di infinito, nelle sue opere *“La dotta ignoranza”* e *“Le congetture”*.
Cusano, che era un cardinale, introdusse però l’infinito in maniera teologico – filosofica, nella contrapposizione tra Dio (infinito) e l’Uomo (finito). Per arrivare alla moderna concezione di infinito utilizzata in matematica saranno necessari ancora quattro secoli.

Galileo ed i paradossi dell’infinito

Uno tra i primi pensatori del Rinascimento a cercare di mettere in crisi il concetto di infinito elaborato dalla filosofia greca fu certamente Galileo Galilei.

> *«Passo ora ad un’altra considerazione, ed é, che stante che la linea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non veggo come si possa sfuggire, la composizione essere di infiniti indivisibili, perché una divisione e subdivisione che si possa proseguir perpetuamente, suppone che le parti siano infinite, perché altramente la subdivisione sarebbe terminabile; e l’esser le parti infinite si tira in conseguenza l’esser non quante, perché quanti infiniti fanno un’estensione infinita: e così abbiamo il continuo composto d’infiniti indivisibili.»*

Nel passo precedente, tratto dai *“Dialoghi delle nuove scienze”*, Galileo afferma la possibilità di ridurre un segmento in infiniti elementi *“non quanti”*, cioè indivisibili e privi di estensione. Ogni segmento può essere, infatti, diviso in quante parti si vuole, ciascuna delle quali ancora divisibile. Pertanto è necessario ammettere che il segmento sia composto da infinite parti. Chiaramente, se queste parti sono infinite allora devono essere prive di estensione (*“non quante”*), poiché infinite parti estese avrebbero un’estensione infinita, mentre il segmento ha un’estensione limitata.
L’infinito in atto risulta un’ovvia conseguenza del precedente ragionamento ed il segmento ne è una chiara manifestazione.

La circonferenza è un'altra espressione dell'infinito attuale: dato un segmento, possiamo infatti immaginare di *piegarlo* facendogli assumere la forma di un quadrato o di qualsiasi altro poligono regolare, con un numero di lati arbitrariamente grande.

Chiaramente, ciascuno dei lati è una parte di tale segmento, sempre più piccola man mano che aumenta il numero dei lati. Allora piegandolo a formare un cerchio si può benissimo dire di *"aver ridotto all'atto quelle parti infinite che prima, quando era un segmento dicevamo esser di lei contenute in potenza"*. Possiamo, perciò, immaginare la circonferenza come un poligono con un numero infinito di lati.

Galileo si rese conto ben presto anche dei paradossi che nascevano dall'ammettere l'infinito attuale; nel seguito analizzeremo il *paradosso dei quadrati* ed il *paradosso delle ruote*.

PARADOSSO DEI QUADRATI

I quadrati perfetti sono un sottoinsieme proprio dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Non tutti i numeri naturali, infatti, sono quadrati perfetti: ne è un esempio il 2, come abbiamo visto. È però possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei quadrati perfetti, cioè una corrispondenza nella quale ad ogni numero naturale corrisponda uno ed un solo quadrato perfetto e viceversa.

Numeri naturali	1	2	3	4	5	6	7	8	…	n	…
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Quadrati perfetti	1	4	9	16	25	36	49	64	…	n^2	…

Fig. 2 – Rappresentazione della corrispondenza tra numeri naturali e quadrati perfetti

I quadrati perfetti sono perciò "tanti quanti" i numeri naturali e ciò significa che una parte può essere "uguale" al tutto, contrariamente a quanto affermava lo stesso Euclide che, tra le *nozioni comuni* degli Elementi, affermava: *«l'intero è maggiore della parte».*

Quello dei quadrati è quindi uno dei cosiddetti paradossi dell'*equinumerosità*. Proviamo a chiarirne il significato.

Chiamiamo ***equipotenti*** *(o equinumerosi) due insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca*. Chiaramente se l'insieme è finito non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcuna sua parte propria (come affermava Euclide), ma ciò non vale per gli insiemi infiniti, come mostra l’esempio precedente.

PARADOSSO DELLE RUOTE

Si tratta di un paradosso attribuito ad Aristotele; per spiegarlo, consideriamo due ruote concentriche, tali che la più grande rotoli senza strisciare sopra una retta; le due ruote toccano con i loro punti due segmenti di uguale lunghezza. Infatti, facendo fare un giro completo alla circonferenza più grande da A fino a B, la più piccola arriverà da A_1 al punto B_1,ma i due segmenti AB e A_1B_1 sono uguali.

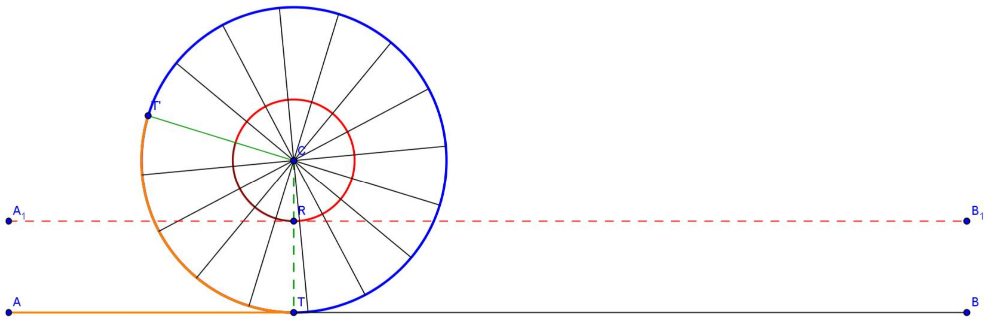

Fig. 3 – Rappresentazione del paradosso delle ruote.

Questo paradosso è basato sul fatto che le due circonferenze hanno “lo stesso numero” di punti, pur avendo raggio diverso. Galileo, nei *“Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze”*, lo affronta e ne fornisce una spiegazione. In sostanza immagina di avere ruote sempre concentriche, ma di forma poligonale, e riesce a dimostrare che se una delle due rotola l’altra è costretta a strisciare; afferma, infatti:

> *«Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza...»*

A testimonianza delle difficoltà incontrate nell’immaginare l’infinito, Galileo fa dire a Salviati, qualche riga dopo:

> *«Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito attorno a gl’infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed eguaglità*

non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro [...].»

Galileo stesso faticava, inoltre, a comprendere come gestire da un punto di vista matematico gli infiniti e gli infinitesimi, tanto da affermare che quando *"siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli sono incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la loro piccolezza"*.
Nonostante ciò ha posto le basi della teoria degli "indivisibili piani", sviluppata poi dal suo discepolo Bonaventura Cavalieri, che rappresenta uno dei cardini della teoria dell'equivalenza dei volumi.
Se ne accorse presto anche Evangelista Torricelli[8], che nel 1644 affermò:

«Che questa geometria degli indivisibili sia un'invenzione del tutto nuova, non oserei affermarlo. Crederei piuttosto che gli antichi geometri si siano serviti di questo modo nell'invenzione dei teoremi più difficili, benché nelle dimostrazioni abbiano preferito un'altra via, sia per occultare il segreto dell'arte, sia per non offrire agli invidi detrattori alcuna occasione per contraddirli»

Alcuni storici sostengono, infatti, che lo stesso Archimede abbia ricavato alcuni dei suoi importanti risultati sulla quadratura delle figure piane immaginando l'infinito "in atto", ma che abbia deciso di dimostrarli senza farvi ricorso per evitare di entrare in aperto conflitto con la cultura dell'epoca.

Cantor e la definizione di insieme infinito

Nei secoli successivi lo studio della geometria e la neonata teoria degli insiemi hanno portato alla definizione di insieme infinito, ancor oggi largamente utilizzata. Prima di esaminarla osserviamo alcuni risultati geometrici apparentemente paradossali. Dimostriamo, ad esempio, che segmenti diversi sono equipotenti tra loro. Per farlo osserviamo dapprima (Fig. 4a) che il segmento CD è congruente al segmento AD' poiché ad esso sovrapponibile mediante una traslazione; dal momento che D' è interno al segmento AB, possiamo affermare che AD' < AB. Se però congiungiamo gli estremi dei due segmenti come in fig. 4b, possiamo osservare che la proiezione di centro O li mette in corrispondenza

[8] Discepolo di Galileo, oltre a studiare la pressione atmosferica, ha ottenuto importanti risultati nell'ambito della teoria della misura.

biunivoca, poiché associa a ciascun punto di AB uno ed un sol punto di CD e viceversa.

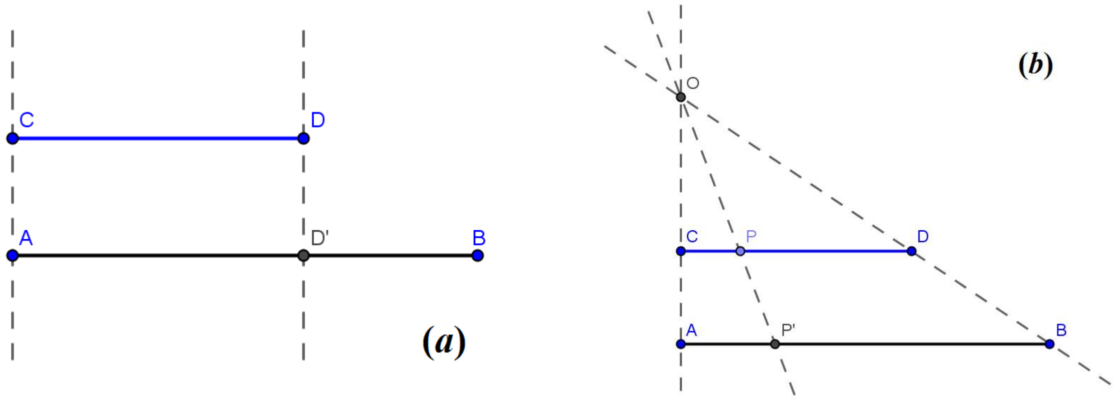

Fig. 4 – Segmenti diversi sono equipotenti

Possiamo così concludere che i due segmenti sono equipotenti nonostante abbiano lunghezze diverse.

Analizziamo un risultato ancor più strabiliante: un segmento privato dei suoi estremi è equipotente ad una retta.

La dimostrazione si basa in questo caso sulla composizione di due diverse corrispondenze biunivoche, che analizzeremo nella figura seguente.

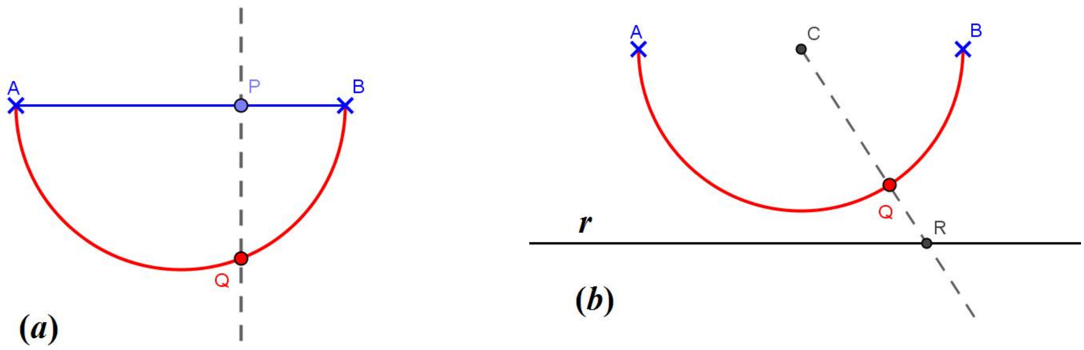

Fig. 5 – Proiezione della semicirconferenza sul diametro (*a*) e sulla retta (*b*)

Tramite una proiezione ortogonale si associa un punto della semicirconferenza, privata dei punti A e B, ad uno ed un sol punto del suo diametro, privato anch'esso dei punti A e B, e viceversa (Fig. 5a); si ottiene in tal modo una corrispondenza biunivoca, che dimostra l'equipotenza tra questi insiemi di punti. Proiettando, poi, dal centro C sulla retta si associa ad ogni punto della semicirconferenza, privata dei punti A e B, uno ed un sol punto della retta, e viceversa (Fig. 5b); otteniamo quindi una nuova corrispondenza biunivoca che, composta

con la precedente, consente di dimostrare l'equipotenza tra il segmento AB privato degli estremi e la retta *r*.
Queste considerazioni geometriche ci conducono alla definizione di *insieme infinito*, data da Cantor e Dedekind nel 1872: *un insieme si dice infinito se e solo se è equipotente a qualche sua parte propria*.
È bene sottolineare che questa definizione, oggi universalmente accettata, fu inizialmente molto criticata perché contrasta con il senso comune, secondo cui – per dirla con Euclide – *«l'intero è maggiore della parte»*.
Significativa è la spiegazione che ne da Bolzano:

> *«Può sembrare* [che un fatto, che si verifica per gli insiemi finiti, n.d.a.], *debba accadere anche quando gli insiemi, anziché finiti, siano infiniti. Può sembrare, ho detto; ma uno studio più approfondito rivela che tale necessità non esiste, perché la ragione per la quale* [quel fatto, n.d.a.] *accade per tutti gli insiemi finiti sta appunto nella loro finitezza e quindi viene meno per quelli infiniti.»*

Cantor e la cardinalità degli insiemi
Dopo questo lungo preambolo proviamo ad esaminare, almeno per sommi capi, il contributo fondamentale portato da Georg Cantor all'analisi della cardinalità[9] degli insiemi infiniti.
Il primo insieme infinito di cui facciamo esperienza è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali; infatti, detto P l'insieme dei numeri naturali pari, si verifica facilmente che la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \rightarrow & P \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}$$

è una corrispondenza biunivoca; è molto facile anche osservare che la funzione "successore" determina una corrispondenza biunivoca tra l'insieme P dei numeri naturali pari e l'insieme D dei naturali dispari.
Definiamo *insieme numerabile* un insieme infinito che può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.
Per quanto detto sopra, gli insiemi dei numeri pari e dei numeri dispari sono numerabili. Più interessante, a questo punto, è osservare che *l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi è numerabile*.

[9] Due insiemi hanno la stessa cardinalità se e solo se sono equipotenti tra loro. È interessante osservare che se tali insiemi sono finiti, la loro cardinalità coincide con il numero dei loro elementi.

Per farlo possiamo utilizzare la funzione

$$\begin{array}{rcl} g: \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & g(n) \end{array}$$

così definita:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 2n & n > 0 \\ -2n-1 & n < 0 \end{cases}$$

È abbastanza semplice osservare che questa funzione manda 0 in sé stesso ed i numeri positivi nei pari, mentre manda i numeri negativi nei dispari; con un po' di pazienza si riesce a verificare che anche questa funzione è una corrispondenza biunivoca, e questo dimostra l'affermazione precedente.
Ma non è ancora finita! Uno degli aspetti più stupefacenti del lavoro di Cantor è l'aver dimostrato che anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

Per farlo, divide la dimostrazione in due passi dimostrando separatamente che gli insiemi dei numeri razionali positivi e dei numeri razionali negativi sono numerabili, e concludendo che, perciò, è numerabile anche l'insieme $\mathbb{Q}$.

La dimostrazione è piuttosto lunga, ma si basa su un'idea geniale che merita di esser presentata.
Cantor immagina di rappresentare i numeri razionali positivi mediante una tabella formata da infinite righe e colonne; nella prima riga dispone tutte le frazioni di denominatore 1, nella seconda quelle di denominatore 2, e così via (vd. Fig. 6).

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Fig. 6 – Rappresentazione delle frazioni positive in una tabella infinita

Questa rappresentazione ha un difetto, se si vuole costruire una corrispondenza biunivoca: compaiono anche le frazioni non ridotte ai minimi termini. Cantor allora decide di eliminarle dalla tabella.

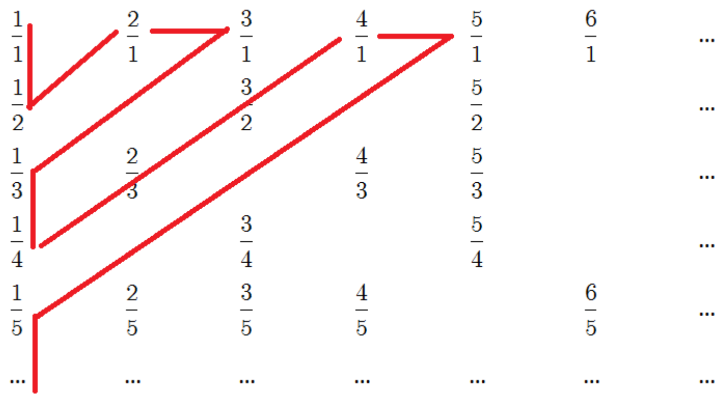

Fig. 7 – Rappresentazione di uno dei "metodi diagonali" di Cantor

Vi è però un altro problema di non secondaria importanza: Cantor doveva trovare un modo per percorrere per intero la tabella senza escludere alcun numero tra quelli rimasti. Decide allora di muoversi "in diagonale", come mostrato in Fig. 7. Così facendo riesce a costruire una funzione che associa a ciascun numero naturale un ben preciso numero razionale, secondo lo schema presentato in Fig. 8.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	...
$f(n)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	...

Fig. 8 – Corrispondenza tra numeri naturali e razionali positivi

Cantor ha dimostrato che la funzione così costruita è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri razionali positivi e, lavorando in modo analogo anche per le frazioni negative, ha concluso che anche $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile[10].

La cosa è, a prima vista, stupefacente perché $\mathbb{Q}$ è un insieme denso[11], mentre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono discreti, ma va sottolineato il fatto che l'essere o meno un insieme denso è una proprietà della relazione d'ordine e poco ha a che fare con la cardinalità dell'insieme stesso.

---

[10] In realtà $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$, cioè $\mathbb{Q}$ è l'unione tra due insiemi numerabili e l'insieme che contiene il solo 0, ma appare chiaro che l'aggiunta di un unico elemento ad un insieme numerabile non ne cambia la cardinalità.

[11] Ricordiamo che un insieme A si dice *denso* se, scelti arbitrariamente due suoi elementi *a* e *b*, con $a < b$, esiste almeno un punto $c \in A$ tale che $a < c < b$; se l'insieme non è denso, viene invece detto *discreto*.

Piuttosto, da quanto detto finora, potrebbe sembrare che ogni insieme infinito sia numerabile, visto che lo sono tutti gli insiemi numerici che abbiamo esaminato. Cantor ha dimostrato, invece, che *l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è più che numerabile*[12].

Diciamo che, se un insieme è equipotente all'insieme dei numeri reali si dice che esso ha la *potenza del continuo*, come avviene, ad esempio, per l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Anche questo può sembrare strano, dal momento che – ad esempio – nell'insieme $\mathbb{C}$ si trovano le soluzioni di equazioni del tipo $x^4 + 1 = 0$, che non esistono in $\mathbb{R}$; d'altra parte, anche in questo caso, le proprietà algebriche dell'insieme $\mathbb{C}$ non dipendono dal "numero" dei suoi elementi.

Arrivati a questo punto, sappiamo che esistono insiemi infiniti di cardinalità diverse: quelli numerabili e quelli con la potenza del continuo. Ma il discorso non è ancora concluso!

Cantor dimostrò, infatti, che *dato un insieme infinito A è sempre possibile costruire un nuovo insieme, anch'esso infinito, di potenza maggiore*: l'insieme $\mathscr{P}(A)$ che contiene tutti e soli i sottoinsiemi di A.

Viene ora spontaneo chiedersi se esista un insieme infinito la cui cardinalità sia compresa tra la potenza del numerabile e quella del continuo. Per cercare di rispondere a questa domanda, Cantor ha formulato la cosiddetta ***ipotesi del continuo***, che potremmo enunciare così: *non esiste alcun insieme la cui cardinalità sia compresa tra la potenza del numerabile e quella del continuo.*

Gli sviluppi del Novecento

Al Secondo Congresso Internazionale di Matematica tenutosi a Parigi nell'agosto del 1900, nella conferenza "I Problemi della Matematica" David Hilbert ha introdotto i suoi famosi 23 problemi dicendo:

> *"Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro cui si nasconde il futuro; di gettare uno sguardo ai prossimi sviluppi della nostra scienza e ai segreti del suo sviluppo nei secoli a venire? Quali saranno le mete verso cui tenderà lo spirito delle future generazioni di matematici? Quali metodi,*

[12] La dimostrazione, pur essendo molto creativa, è troppo complessa per queste note e verrà omessa; chi fosse interessato la può trovare al link https://app.box.com/s/tdrcziec900bfwv96mlwaemnxgs0rwni

quali fatti nuovi schiuderà il nuovo secolo nel vasto e ricco campo del pensiero matematico?"

Il primo dei problemi proposti da Hilbert era appunto l'ipotesi del continuo, precedentemente introdotta da Cantor. Su questo problema si sono misurati alcuni tra i più grandi matematici dell'ultimo secolo. Nel 1936 Gödel ha dimostrato la coerenza relativa dell'ipotesi del continuo con gli assiomi di Zermelo – Fraenkel per la teoria degli insiemi. In altre parole, se assumiamo come ulteriore assioma l'ipotesi del continuo, le teoria che né verrà fuori sarà non contraddittoria, ammesso che lo sia la teoria degli insiemi senza aggiungere questo assioma. Nel 1963, Cohen ha dimostrato l'impossibilità della negazione dell'ipotesi del continuo, ossia, che l'ipotesi del continuo può essere accettata o rifiutata senza per questo entrare in alcun modo in contraddizione.
Quanto provato da Cohen sembrerebbe essere l'ultima parola sull'argomento; nella realtà, invece, le tecniche che ha utilizzato per la dimostrazione hanno aperto le porte ad un nuovo modo per costruire modelli in teoria degli insiemi, dando il via – come spesso accade – ad un fiorente campo di ricerca nella matematica moderna.

Ringrazio il collega ed amico, prof. Paolo Norbiato, docente di filosofia, per aver riletto con pazienza queste note prima della stesura definitiva.

Bibliografia e sitografia

- Emma Castelnuovo, “Pentole, ombre, formiche – in viaggio con la matematica”, La Nuova Italia Ed., Firenze (2001)
- Galileo Galilei, *“Opere”*, Rizzoli Ed., Milano – Roma 1938, Vol.II
- Piergiorgio Odifreddi *“Storia dell'infinito”,* Puntata realizzata con gli studenti del Liceo Scientifico "Giordano Bruno" di Torino il 2 aprile 2001 (http://www.emsf.rai.it/grillo/trasmissioni.asp?d=795)
- Kurt Gödel – I grandi della scienza – Le Scienze (febbraio 2001)
- Akihiro Kanamori: «Ipotesi del continuo» (http://math.bu.edu/people/aki/15.pdf)