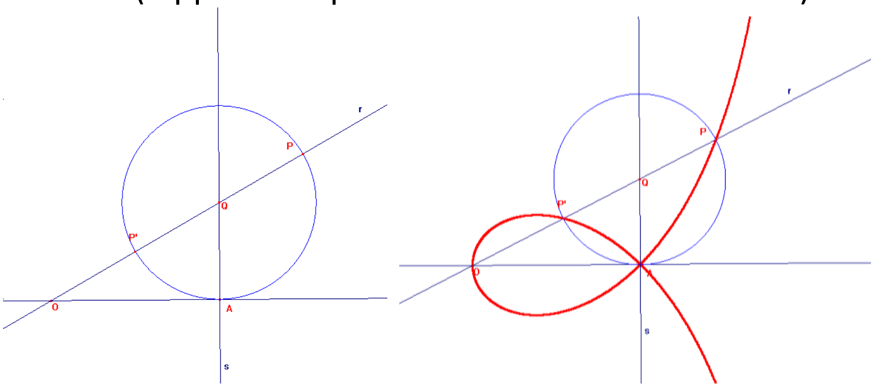
Cubiche e quartiche
luoghi geometrici di punti del piano (parte I)

Elena Stante

La strofoide retta

In un riferimento cartesiano *xOy* sia *A* (*h*, 0) un punto generico dell'asse *x*. Detta *s* la retta condotta per il punto *A* parallela all'asse *x* ed *r* una retta generica uscente dall'origine *O* , il luogo descritto dai punti d'intersezione della circonferenza *C* di centro *Q* e raggio *QA* con la retta *r* , al variare di questa, è una strofoide.
Tracciamo la curva in maniera dinamica , utilizzando il software applicativo Cabri Géomètre :

ISTRUZIONI CABRI
Mostra gli assi
Traccia un punto *A* sull'asse *x*
Traccia la retta *s* per *A* perpendicolare all'asse *x*
Traccia una retta generica r per l'origine O
Punto Q intersezione tra le rette *r* ed *s*
Traccia la circonferenza di centro *Q* e raggio *QA*
Punti *P* e *P'* intersezioni della circonferenza con la retta *r*
Per tracciare il luogo descritto da *P* e *P'* al variare della retta *r* per *O* :
Strumento Traccia : indica i punti *P* e *P '* e trascina la retta *r* nel piano
(oppure adopera lo strumento Animazione)



EQUAZIONI DELLA CURVA

Per determinare l'equazione cartesiana della curva, essendo A (h, 0) il punto dell'asse x , l'equazione della retta s per A parallela all'asse y è la seguente :

$$s : x = h$$

Il punto Q , intersezione della retta s con una retta generica uscente dall'origine O del riferimento, ha coordinate soluzioni del sistema $\begin{cases} x = h \\ y = mx \end{cases}$,ovvero $Q(h, mh)$

Essendo $OA = y_Q = mh$ il raggio della circonferenza *C* e Q il suo centro , essa ha equazione :

$$(x-h)^2 + (y-mh)^2 = m^2h^2$$

L'eliminazione del parametro m, coefficiente angolare della retta r, dalle due equazioni della circonferenza e della retta r stessa, porta all'equazione cartesiana della strofoide :

$$(x^2+y^2)(x-2h) + h^2x = 0$$

L'equazione polare di questa strofoide si determina semplicemente.
Se l'origine O è il polo e l'asse x l'asse polare risulta :

$\rho = OP = OQ + QP = OQ + QA$ ed essendo $OQ = \frac{h}{\cos\varphi}, QA = htg\,\varphi$ nel triangolo rettangolo OAQ , si ha : $\rho = \frac{h}{\cos\varphi} + htg\,\varphi$

da cui :

$$\rho = \frac{h(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

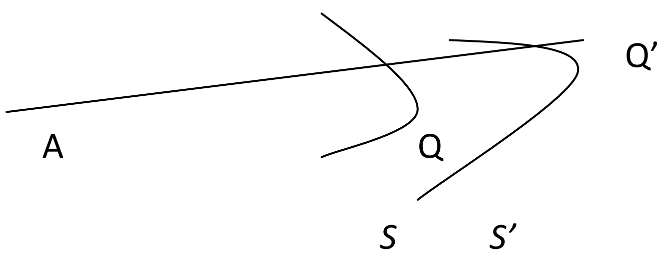
Per h = 1 questa equazione diventa : $\rho = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Procedendo in maniera analoga per il punto P' si ha : $\rho = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}$, essendo $OP' = OQ - QP$.

Dalle relazioni $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, sostituendo $\rho = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$ e ponendo $t = tg\frac{\varphi}{2}$ otteniamo le equazioni parametriche della strofoide : $\begin{cases} x = \dfrac{t^2+2t+1}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t(t^2+2t+1)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$.

La cissoide

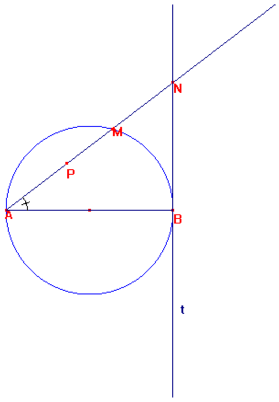
Come la concoide, anche la *cissoide*, il cui nome significa " *edera*", ebbe popolarità nel '600 .
Essa si costruisce in generale partendo da due curve qualsiasi S ed S' e da un punto fisso *A* .



Se *Q* e *Q'* sono due punti in cui una retta per *A* taglia S ed S' , si traccia sulla retta il punto *P* tale che sia *AP* = *QQ'* . Il luogo dei punti *P* è la cissoide di S ed S' rispetto al punto *A* .

La cissoide di Diocle

E' la cissoide che ha come curve base una circonferenza ed una sua tangente e come punto fisso l'estremo del diametro della circonferenza nel punto di tangenza.
Questa curva si può determinare come luogo geometrico nella maniera seguente .
Sia *AB* un diametro di una circonferenza e *t* la tangente ad essa nell'estremo *B* .



Condotta dall'estremo *A* una semiretta qualunque e detti *M* ed *N* i punti d'intersezione rispettivamente con la circonferenza e con la tangente , sia *AP* il segmento su tale semiretta di misura uguale ad *MN* . Al variare della semiretta uscente dal punto *A* , il punto *P* descrive la cissoide di Diocle.

Per tracciare la curva utilizziamo il Cabri Gèométre
ISTRUZIONI CABRI
Mostra gli assi
Traccia un punto (A) sull'asse x
Punto medio del segmento OA
Traccia la circonferenza di diametro OA

Retta tangente (t) alla circonferenza nel punto *A* (perpendicolare in A all'asse *x*)Semiretta uscente da *O* Punti intersezione tra semiretta e circonferenza (*M*) e tra semiretta e retta t (N)

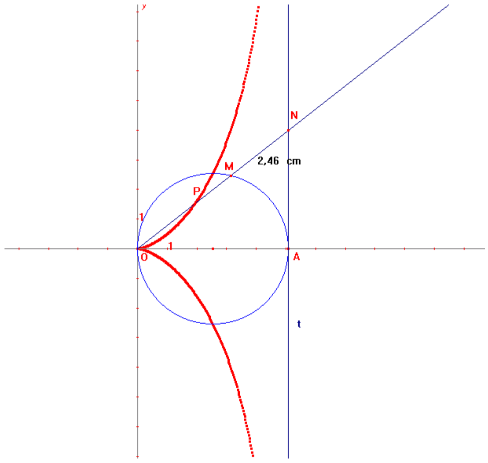
Strumento Distanza e Lunghezza: misura il segmento *MN*

Strumento Trasporto di misura : indica nell'ordine la semiretta *OM*, la misura di *MN* ed il punto *O*

Individua il punto *P* ottenuto sulla semiretta

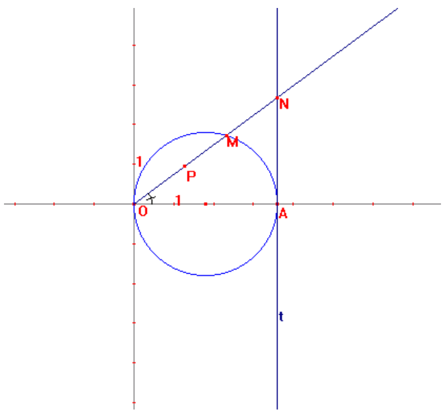
Per disegnare il luogo descritto da *P* al variare della semiretta:

Strumento Traccia: indica il punto *P* e trascina la semiretta nel piano (oppure muovi la semiretta con lo strumento Animazione)



EQUAZIONI DELLA CURVA

Per determinare l'equazione della cissoide di Diocle in coordinate polari , assunto il punto *O* come polo e il diametro *OA* = *a* come asse polare , essendo *OP* = *ρ* e *POA* = *φ* , dalla figura



notiamo che :

$$\rho = OP = MN = ON - OM$$

Dai triangoli rettangoli *OAN* ed *OMA* si ha : $a = OA = ON \cos\varphi$ e $OM = a\cos\varphi$, pertanto :

$$\rho = ON - OM = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi = a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

ovvero $\rho = a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$. Essendo $a = 2r$ e $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ si può scrivere :

$$\rho = 2r\tan\varphi\sin\varphi \qquad (*)$$

che è l'equazione della cissoide di Diocle in coordinate polari .

Determiniamo ora l'equazione cartesiana della cissoide di Diocle .

Essendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ nonché $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, si può passare all'equazione cartesiana per sostituzione nella (*) :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r\frac{y}{x}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

da qui si ha :

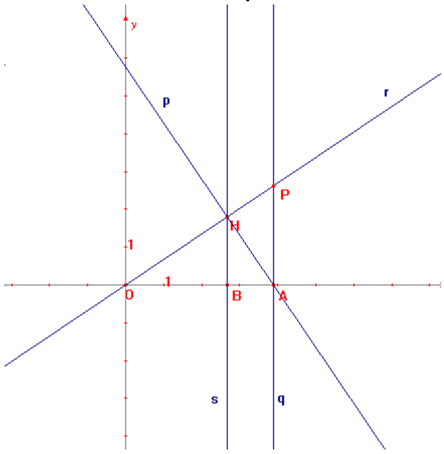
$$(x^2 + y^2)x = 2ry^2$$

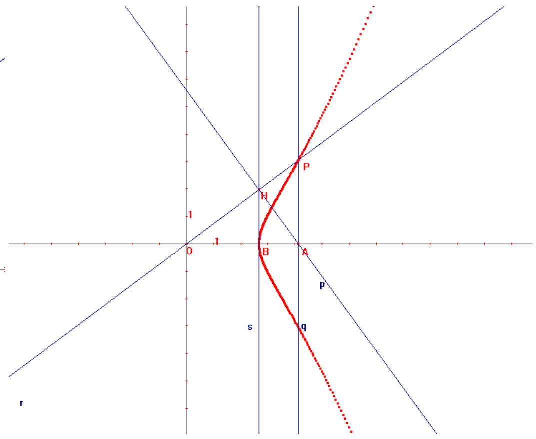
che è appunto l'equazione cartesiana della curva .

La cubica duplicatrice di Longchamps

Definiamo questa curva come un luogo geometrico.
Sono date due rette *r* ed *s* ortogonali fra loro , e sulla retta *r* è dato il punto *O* . Sia *OPA* un triangolo rettangolo in *A* , con *A* sulla retta *r* , tale che il piede *H* dell'altezza relativa all'ipotenusa giaccia su *s* . La curva descritta dal punto *P* al variare del triangolo *OPA* è la cubica duplicatrice di Longchamps.
Per tracciare , in maniera dinamica, il grafico di questa curva utilizziamo Cabri Géomètre , individuando le due rette ortogonali *r* ed *s* nell'asse *x* ed in una retta generica parallela all'asse *y* rispettivamente ; il punto *O* coincide con l'origine *O* del riferimento cartesiano .
ISTRUZIONI CABRI
Mostra gli assi
Traccia retta per un punto qualunque *B* dell'asse *x* una retta parallela all'asse *y* (*s*)
Traccia retta generica (*r*) uscente da *O* Punto intersezione delle rette *r* ed *s* (*H*)
Retta per *H* perpendicolare ad *OH* (*p*)
Punto intersezione (*A*) della retta *p* con l'asse *x*
Retta per *A* parallela all'asse *y* (*q*)
Punto intersezione (*P*) della retta q con la retta *p*
Per disegnare il luogo descritto da P al variare della retta *p*

Strumento traccia: indica il punto P e muovi la retta variando l'angolo *AOP* tra





– 90° e 90 °

EQUAZIONI DELLA CURVA

Determiniamo l'equazione cartesiana della curva , essendo B (*a* , 0) e *P* (*x* , *y*)
.
Dalla similitudine dei triangoli *OBH* e *OAP* segue che

$$OB : BH = OA : AP$$

Nel triangolo *OHA* , per il secondo teorema di Euclide si ha :

$$BH = \sqrt{OB \cdot BA} = \sqrt{a(x-a)}$$

quindi la proporzione si scrive : $a : \sqrt{a(x-a)} = x : y$

da cui $ay = x\sqrt{a(x-a)}$

e , quadrando : $x^3 - a(x^2 + y^2) = 0$ otteniamo l'equazione cartesiana della cubica
.
L'equazione polare della curva possiamo ricavarla fissando il riferimento con il polo in *O* , *OB = a* costante , *POA* = φ ed *OP* = ρ .

Osservato che , nel triangolo *OBH* risulta $BH = a \tan \varphi$, $OH = \dfrac{a}{\cos \varphi}$

Mentre nel triangolo *AOH* è : $AH = OH \tan \varphi = \dfrac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$

E nel triangolo *PAH* abbiamo : $PH = AH \tan \varphi = a\dfrac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}$

Essendo *OP = PH + OH* si ha :

$$\rho = OP = a\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{a}{\cos\varphi} = a\frac{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}{\cos^3\varphi} = \frac{a}{\cos^3\varphi}$$

perciò : $\rho = \dfrac{a}{\cos^3\varphi}$ (*) equazione polare della cubica

Se poniamo $\tan\varphi = t$, dalle note relazioni $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ e dall'equazione polare (*) otteniamo le equazioni parametriche della curva :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos^2 t} = a\left(1 + t^2\right) \\ y = \dfrac{a\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \dfrac{a\tan\varphi}{\cos^2\varphi} = at\left(1 + t^2\right) \end{cases} .$$

La versiera di Gaetana Agnesi

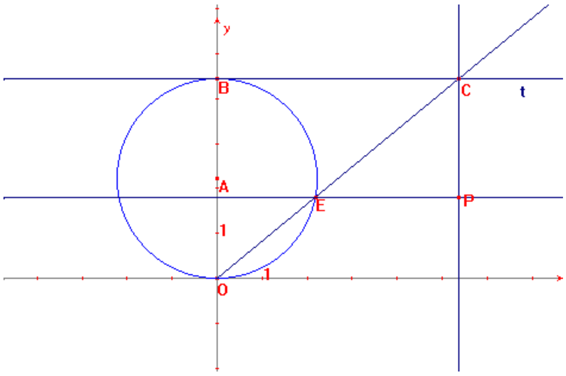
Il grande contributo di Maria Gaetana Agnesi alla matematica è stato quello di aver riunito i lavori di vari matematici in maniera molto sistematica con interpretazioni proprie. La Agnesi ha legato il suo nome alla curva chiamata *versiera* (presente nel suo trattato del 1748), già scoperta precedentemente da Guido Grandi. Grandi l'aveva chiamata *curva con seno verso* (*sinus versus*) che può essere tradotto come *inverso del seno* ma anche *contrario*, *nemico*. Di qui il nome di *versiera*, "avversaria", che viene di solito attribuito alle streghe. Infatti la curva per gli inglesi è nota come *witch of Agnesi* (strega di Agnesi).

La versiera si può definire un luogo geometrico di punti così come segue .

Si consideri in un piano cartesiano una circonferenza di raggio *a*, centro sull'asse *y* e tangente all'asse *x* nell'origine *O* (che è il punto *A* nella costruzione con Cabri) .
Sia *r*: *y =m x* una retta del fascio di centro *O* , *E* il punto d'intersezione della retta con la circonferenza . Costruita l'ulteriore retta tangente *t* alla circonferenza

nel punto *B* diametralmente opposto all'origine (e parallela all'asse *x*), sia *C* l'intersezione delle retta *r* con *t* .

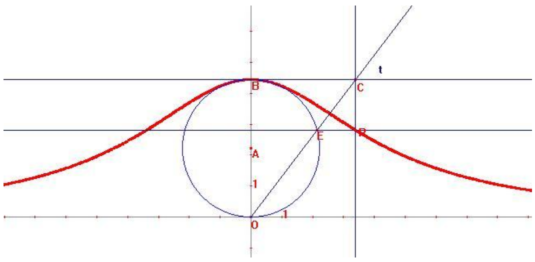
Il luogo dei punti *P* aventi l'ascissa di *C* e l'ordinata di *E* al descrivere di *E* la circonferenza (o al variare di *C* sulla retta parallela all'asse *x*) è la versiera di Agnesi.



Tracciamo la versiera utilizzando Cabri Géomètre.

ISTRUZIONI CABRI
Mostra gli assi
Traccia un punto *A* sull'asse y
Traccia una circonferenza di centro *A* e passante per *O* (strumento compasso)
Traccia una semiretta *r* uscente da *O*
Punto *B* intersezione della circonferenza con l'asse *y*Traccia la retta *t* per *B* tangente alla circonferenza (parallela all'asse *x* per *B*)
Punto *C* intersezione delle rette *r* e *t*
Traccia la retta per *A* parallela all'asse *x* e la retta per *C* parallela all'asse *y*
Punto *P* intersezione di queste due rette Luogo del punto *P* al variare della retta *r* :

Strumento Traccia , indica il punto *P* e trascina la retta *r* nel piano (oppure muovi la retta con lo strumento Animazione)



Determiniamo le equazioni parametriche di questa curva con il metodo analitico .
L'equazione della circonferenza di centro il punto D (*a* , 0) e raggio *a* è :

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

cioè $$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

e quella del fascio di rette per l'origine O è : $y = mx$

Dal sistema formato dalle due suddette equazioni otteniamo le coordinate del punto $E\left(0, \frac{2am^2}{m^2+1}\right)$.

Il punto *C* è invece il punto comune alla retta *y* = 2*a* ed alla generica retta del fascio $y = mx$; perciò le sue coordinate sono : $x_C = \frac{2a}{m}$

$$y_C = 2a$$

Il punto *F* , che definisce il luogo , ha l'ascissa uguale a quella del punto *C* e l'ordinata uguale a quella di *E* ; perciò risulta :

$$\begin{cases} x_F = \frac{2a}{m} \\ y_F = \frac{2am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della versiera .

Essendo *m* = $\tan\varphi$, coefficiente angolare della generica retta del fascio , possiamo riscrivere le equazioni parametriche nel modo seguente :

$$x = \frac{2a\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2a\cot g\varphi$$

$$y = 2a\sin^2\varphi$$

Dalle equazioni parametriche si passa all'equazione cartesiana ricavando il parametro *m* dalla prima equazione e sostituendo poi nella seconda l'espressione trovata .

Dai calcoli si ottiene : $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

L'equazione polare , infine , si ottiene dall'equazione cartesiana e dalle relazioni

x = ρ cos φ

y = ρ sin φ ; essa è la seguente : $r^3 sen\varphi\cos^2\varphi + 4a^2 r sen\varphi = 8a^3$.

Nota: La seconda parte di questa relazione sarà in rete nel prossimo numero e tratterà le seguenti curve:

-Il bicorno o feluca

La curva k

Il bifolium

Il trifolio retto

RELAZIONE

Il lavoro prodotto con gli studenti è il risultato di una serie di attività svolte in buona parte nel laboratorio d'informatica con una quarta classe di liceo scientifico.

Alla base del percorso è la definizione di una curva intesa come luogo geometrico di punti, un concetto che i ragazzi incontrano nel biennio nella circonferenza e nella terza classe nelle coniche.

Il riconoscimento della forma della curva è reso particolarmente interessante dal software di geometria dinamica Cabri Géomètre e la sua costruzione richiede una procedura che traduca la proprietà di cui godono i punti della curva consentendone il tracciamento.

Nella prima fase del lavoro, avendo fissato l'attenzione su alcune curve algebriche di terzo e quarto grado, si è perciò fornita ai ragazzi la definizione di ciascuna curva in quanto luogo geometrico, lasciandoli quindi liberi di ricercare la maniera migliore per ottenerne il tracciamento grafico, utilizzando il suddetto software.

Successivamente i ragazzi, guidati nell'individuazione di qualche particolarità del luogo e talora anche nella scelta del tipo di riferimento (cartesiano o polare) più congeniale, hanno ricercato le equazioni delle curve, riconoscendone alcune loro caratteristiche.

Nonostante la tipologia particolare delle cubiche e soprattutto delle quartiche, questo tipo di analisi è anche in qualche modo propedeutico allo studio di funzioni che è argomento dell'ultimo anno di liceo.

Il mezzo informatico è stato comunque utilizzato anche sfruttando le potenzialità del software applicativo Derive; questo consente, infatti, di effettuare i calcoli, risolvendo sistemi ed equazioni, e può fornire la conferma che l'equazione della curva che è stata trovata (in forma cartesiana, polare o attraverso le equazioni parametriche) è proprio quella che ciascun suo punto ha descritto attraverso la procedura precedentemente individuata con il Cabri Géomètre.

L'impostazione che si è data al lavoro ha mirato a stimolare la curiosità e la creatività nei ragazzi; trovandosi di volta in volta in una situazione nuova, non conoscendo cioè anticipatamente le curve oggetto di studio, essi hanno potuto maturare il gusto della ricerca e della scoperta.

Il lavoro di gruppo ha poi fornito a ciascuno l'occasione di fornire il proprio contributo, rafforzando l'autostima e garantendo il rispetto delle opinioni altrui.

Le competenze in ambito geometrico e di geometria analitica sono state esaltate sia nella prima fase di costruzione che nella fase di ricerca delle equazioni delle curve, le competenze informatiche relative ai due software sono state potenziate e messe al servizio dell'apprendimento non solo nell'ambito del tema trattato