CONCORSO
EUCLIDE- SCUOLA 2015
"MATEMATICA E ARTE, CONNUBIO IDEALE"

EUCLIDE. GIORNALE DI MATEMATICA PER I GIOVANI

Brunelleschi: una misteriosa Cupola Matematica

Alunni: Ciabattini Biagio; Cini Lorenzo; D'Angelo Gabriele;
Di Vincenzo Marco; Duta Adrian; Florindo Fabio; Gapo Ralph Lorenz;
Garcia John Paul; Landi Federico; Nerucci Davide; Nurul Najmul;
Paolacci Lapo; Qukaj Alida; Russo Mattia; Somigli Riccardo;
Tarchi Lorenzo; Vannozzi Tommaso.
(Classe 4B Informatica Itis "A.Meucci", Firenze).

Referenti: Proff.sse Baldi Maria Cristina e Marini Luisa.

La Cupola, un'architettura unica e misteriosa

La Cupola del Duomo di Santa Maria del Fiore di Firenze, la sua magnificenza e la sua imponenza tuttora rendono Firenze orgogliosa di ciò che Filippo Brunelleschi è riuscito a creare fra il 1420 ed il 1436. Ci vollero ben sedici anni per innalzare tale opera. La costruzione della Cupola avvenne in periodo umanistico e fu un vero capolavoro del tempo, che procurò grande orgoglio al popolo fiorentino. Facciamo un salto indietro nel tempo, precisamente nel 1367, si modificarono le dimensioni di pianta e di alzato della cattedrale. Si ingrandirono le dimensioni della base della Cupola, portandole alle dimensioni attuali (45 metri). Queste varianti, se da un lato resero più imponente il complesso della cattedrale fiorentina, dall'altro ne complicarono tutti i problemi costruttivi: si trattava infatti della più grande Cupola del mondo da costruire in muratura, cioè di una delle più complesse strutture architettoniche che mente umana avesse concepito e iniziato a realizzare fino ad allora.

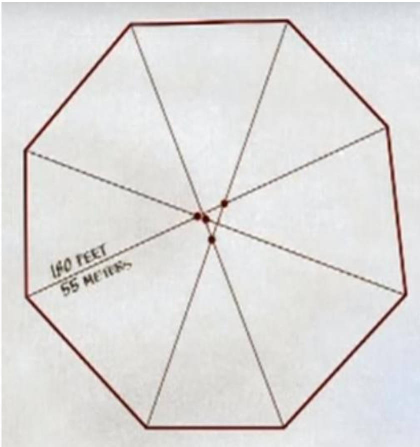

Illustrazione 1: Base ottagonale Cupola

Se la Cupola di Santa Maria del Fiore è oggi un fatto compiuto lo dobbiamo solo alla genialità e alla tenacia di Filippo Brunelleschi. Fu lui a risolvere, con l'introduzione di nuove tecniche costruttive e di nuove macchine, ma soprattutto con il suo coraggio e la sua ostinazione, tutte le incognite di tale costruzione. Si sa quanto ebbe a lottare contro l'arroganza e l'ignoranza dei costruttori più in vista del suo tempo e quanta incredulità le sue soluzioni innovative incutes-sero. Si aggira intorno alla Cupola anche una sorta di mistero dovuta al fatto dell'inesistenza di fonti, appunti o documenti scritti da parte di Brunelleschi: molti studiosi si sono quindi cimentati nell'ipotizzare il progetto costruttivo della Cupola sia da un punto di vista architettonico che matematico. Il famoso architetto, non lasciò alcuna traccia sul processo culturale e mentale per la costruzione della Cupola, ma nella concezione strutturale si ha grazie a famosi studiosi, alcune ipotesi sul più grande mistero di Firenze[1].

La Matematica ci può aiutare a capirne di più.

Iniziamo ad analizzare la geometria della Cupola. La base su cui è stata costruita è un ottagono irregolare nel quale non si ha l'incidenza in un unico punto da

1 . Roberto Corazzi e Giuseppe Conti, *“ Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze”,* da http://eprints.bice.rm.cnr.it/4046/1/Boll.n12_Brunelleschi.pdf

parte delle diagonali (Vedi Illustrazione 1) .
Brunelleschi, come è possibile notare dall'Illustrazione 2, delineò il il profilo della Cupola interna ad un sesto di quinto acuto, mentre quella esterna ad un sesto di quarto acuto[2]. Il significato geometrico è il seguente: Il diametro della Cupola interna viene diviso in cinque parti uguali, mentre quello dell'esterna in quattro parti. Successivamente si punta il compasso nei due centri di quinto acuto, ciascuno dei quali si trova a 9 metri dall'estremità del diametro e si tracciano due archi di circonferenza con raggio pari a 36,00 metri.
Puntando il compasso negli stessi punti, si tracciano gli archi di quarto acuto con raggio pari a 40,50 metri.

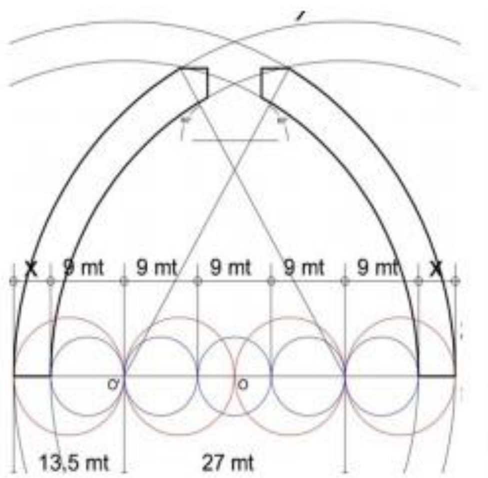

Illustrazione 2: Profilo della Cupola

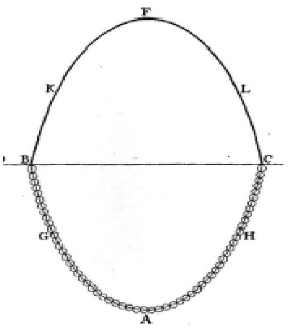

Illustrazione 3: Curva catenaria di Ximenes

Quale curva descrive il profilo della Cupola?
Leonardo Ximenes (1716-1786), astronomo e geografo fiorentino, interpretò geometricamente il profilo della Cupola. Si basò sulla catenaria[3], una curva che riesce a sostenere un arco soggetto solo al proprio peso, come dimostrato da Giovanni Bernoulli nel 1691 la cui equazione è $y=\frac{a(e^{ax}+e^{-ax})}{2}$

Le Illustrazioni 3 e 4, ci mostrano come fosse la catenaria . Scrive, infatti, lo Ximenes[4]: “ *Il Brunelleschi non sapeva certamente che, sarebbero venuti dopo di lui alcuni Geometri che avrebbero dimostrato che per dare ad un arco, ad una volta, ad una Cupola quella curvità che facesse massima la sua resistenza, era necessario di dare a quell’arco l’andamento di una curva catenaria rovesciata. Eppure egli è certissimo, che il sesto della nostra Cupola è tale che si accosta assai dappresso alla curva catenaria, curva assai acconcia alla costruzione delle cupole”*.

---

2 Roberto Troli, “LA Cupola DI S. MARIA DEL FIORE:IL CERCHIO NELL'OTTAGONO”,Firenze. http://www.encojournal.com/antico/2.html

3 . Pasquale Catone, “*La catenaria*”, ITIS -LS “F.Giordani,Caserta http://web.fisica.unina.it/biblio/AIFNapoli/CatoneCatenaria.pdf

4 . L. Ximenes:Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e architettoniche. Stamperia Imperiale, Firenze (1757).

Recentemente gli studiosi fiorentini Giuseppe Conti e Roberto Corazzi hanno verificato l'intuizione interpretativa di Ximenes grazie a rilievi effettuati direttamente sulla Cupola (Vedi Illustrazione 4). Osserviamo che, in realtà, la Cupola di Santa Maria del Fiore è formata da due cupole: una interna, che è la struttura portante ed ha uno spessore di circa 2,4 metri, ed una esterna, più sottile (circa 0,9 metri), la quale, come disse il Brunelleschi, serve a proteggere la Cupola interna dalle intemperie e dagli sbalzi di temperatura ed a renderla più magnifica e gonfiante. Fra queste due cupole vi è uno spazio di circa 1,2 metri, attraverso il quale è possibile salire fino alla sua sommità, cioè alla base della lanterna.

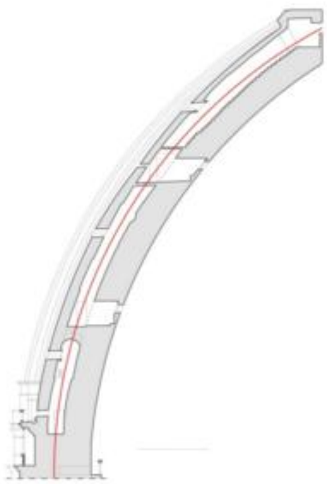

Illustrazione 4: La curva catenaria della Cupola.

Una curiosità: nella Cupola si ritrovano i numeri di Fibonacci.

La Cupola inizia da un’altezza di 55 metri, poggia su un tamburo di 13 metri, è alta mediamente 34 metri ed è sormontata dalla Lanterna di 21 metri. Si possono riconoscere alcuni numeri della successione di Fibonacci che, com’è noto, sono legati alla sezione aurea. In Matematica, la **successione di Fibonacci**, indicata con F_n è una successione di numeri interi positivi in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti. I primi due termini della successione sono per definizione F1 = F2 = 1 . Tale successione ha quindi una definizione ricorsiva secondo la seguente regola: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, (per ogni n>2). I primi termini della successione di Fibonacci sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **34**, **55**. L'intento di Fibonacci era quello di trovare una legge Matematica che potesse descrivere la crescita di una popolazione di conigli. Il rapporto F_n/F_{n-1}, per n tendente all’infinito, tende al numero algebrico irrazionale Φ , chiamato **sezione aurea** o **numero di Fidia**. In termini matematici il tutto può essere scritto: : $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ dividendo per F_{n-1} si ha $\frac{F_n}{F_{n-1}}=1+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$ posto il rapporto $\frac{F_n}{F_{n-1}}=x$ nel senso che per n molto grande la sequenza dei rapporti tende a “stabilizzarsi” verso un valore costante x si ricava l’equazione $x^2-x-1=0$ da cui si ricava che $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cioè x è proprio il numero aureo.

La navigazione e le vele della Cupola

La Cupola è formata da otto vele che non presentano la stessa continuità delle cupole a pianta circolare, infatti ciascuna vela non è una porzione di una sfera, ma rappresenta una porzione del mantello di un cilindro a sezione retta ellittica (Vedi Illustrazione 5).

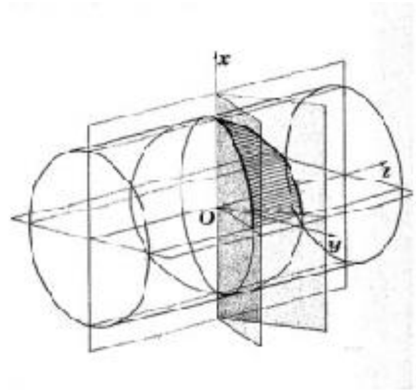

Illustrazione 5: Vele della Cupola sezione di cilindro ellittico

Brunelleschi, grazie agli studi sugli edifici romani apprese la tecnica dei corsi di mattoni a spina di pesce. Sfruttando la forza di coesione offerta dai mattoni collegati a spina, se ne servì per riempire gli spazi tra i costoloni, realizzando un equilibrio statico.

I mattoni risultano sempre ortogonali ai meridiani della Cupola, che risulta simile a quelle di rotazione, disponendosi su linee concave verso l'alto dette corde blande che sono le corrispondenti dei paralleli nelle cupole semisferiche in quanto perpendicolari alle linee meridiane.

Come possiamo notare dalla Illustrazione 6, Brunelleschi dispose i mattoni ad intervalli regolari; in questo modo egli fu in grado di costruire la Cupola senza necessità di alcun tipo di centina . I mattoni hanno una pendenza massima di 60°[5].. Ma come ha fatto Brunelleschi a sapere precisamente dove andavano disposti i mattoni? Da qui alcune teorie hanno cercato di svelare il grande mistero.

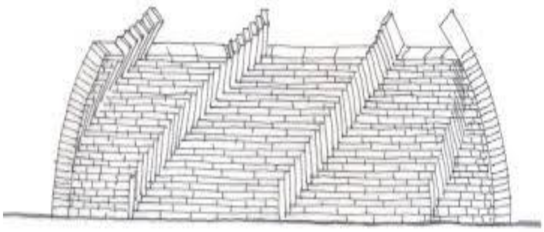

Illustrazione 6: Disposizione dei mattoni a spina di pesce

Per quanto riguarda la regola seguita per la formazione delle corde blande, ci sono due interpretazioni. La prima, sostenuta da Salvatore Di Pasquale e Lando Bartoli (Vedi Illustrazione 7), afferma che le curve delle corde blande si ottengono intersecando un cono variabile con la vela (che è una porzione di cilindro ellittico). La seconda sostenuta da alcuni architetti, come Ximenes, suppone che le corde blande siano lossodromiche ortogonali dei meridiani, cioè curve che in ogni punto sono ortogonali ai meridiani delle vele. Questa teoria è più semplice dal punto di vista operativo, perché tale curva viene determinata localmente: è sufficiente costruire la curva che in ogni punto Po è perpendicolare alla meridiana dalla

---

5 . Roberto Troli, "*LA Cupola DI S. MARIA DEL FIORE:IL CERCHIO NELL'OTTAGONO*",Firenze. http://www.enco-journal.com/antico/2.html

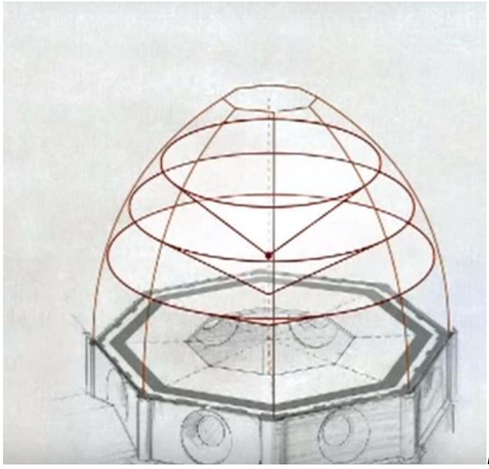

Illustrazione 7: Corde blande ottenute con l'intersezione di coni variabili (Di Pasquale)

vela passante per quel punto. In navigazione**, la** lossodromia *(*losso dal greco antico loxos*, curvo, e* dromos*, percorso, da* dramein, correre) è la spirale logaritmica, nel caso sferico, che inviluppa i poli e che unisce due punti qualsiasi sulla superficie terrestre, tagliando tutti i meridiani con lo stesso angolo è sufficiente pensare ad una nave che solca il mare mantenendo la bussola sempre con lo stesso angolo rispetto al Nord. Le curve della spina pesce (Vedi Illustrazione 8) sono lossodromie e geodetiche:
lossodromie perché formano un angolo di 45° con le generatrici del cilindro ellittico e geodetiche in quanto essendo eliche cilindriche, sono la linea più breve che unisce due punti. Infatti, sviluppando il cilindro in un piano l'elica si trasforma in una retta.

In realtà le due teorie sono praticamente coincidenti, a parte un errore massimo di 0,4° e quindi quasi trascurabile.
Curioso è che a Firenze, le scale lato Maratona dello stadio Artemio Franchi, costruito tra il 1930 ed il 1932, si ritrovino le curve lossodromiche a forma di elica cilindrica notabili nell'Illustrazione 9.

Illustrazione 8: Linea spina pesce che si rastremano verso l'alto

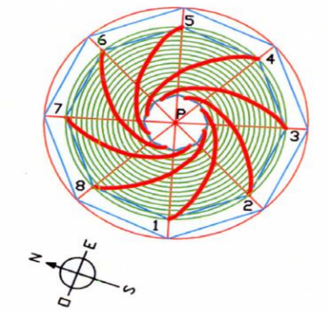

Illustrazione 9: Scale progettate dall'architetto G.Michelucci

Una Cupola in miniatura

Illustrazione 10: Modellino scala 1:5 della Cupola nel parco dell'Anconella

Il professor Massimo Ricci docente presso la facoltà di Architettura dell'Università Firenze, da alcuni decenni sta indagando sul mistero della Cupola. Egli nel 1989, iniziò a costruire un modellino in scala 1:5[6]. che oggi ritroviamo presso il parco pubblico fiorentino dell'Anconella (Vedi Illustrazione 10). Secondo Ricci, le maestranze del Brunelleschi avrebbero utilizzato corde per posizionare i mattoni le quali erano fissate ad uno sche-ma a forma di fiore. Più in dettaglio, un capo della corda sarebbe stato fatto scorrere su una curva particolare chiamata concoide di Nicomede, mentre l'altro capo fornisce immediatamente posizione ed inclinazione dei mattoni, basta solo controllare che la corda passi nel centro geometrico stabilito anche questo con corde .

La concoide è una curva algebrica razionale, piana, simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, usata per risolvere i problemi classici della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo.

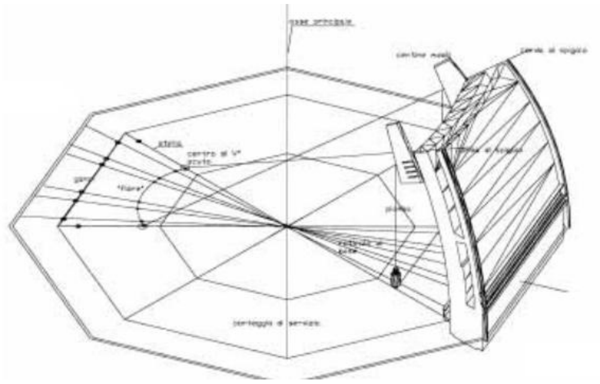

Illustrazione 11: Schema utilizzato dal prof.Ricci per la costruzione del modello in scala, si noti il sistema di corde e l'arco di concoide disegnato sul piano ottagonale alla base della Cupola

La concoide o clocodie prende il nome dal matematico e filosofo Nicomede vissuto nel II sec. a. C. tra Grecia ed Egitto, più precisamente Atene ed Alessandria, il quale introdusse la curva che chiamò appunto concoide (in Greco conchiglia). Questa curva serve per la soluzione grafica del problema della divisione di un dato angolo in tre parti uguali ossia della trisezione dell'angolo.

6 . Associazione Filippo di Ser Brunellesco, *"Il Modello"*,Firenze. http://www.filippodiserbrunellesco.org/home/index.php?c=TU9ERUw=

Costruzione della curva: (Vedi Illustrazione 12)

Sia data una retta l, un punto non sulla retta O ed una distanza k. Tracciare una retta passante dal punto O e un punto qualsiasi della retta l che chiamo P. La concoide di Nicomede è il luogo dei punti Q1 e Q2, in modo tale che PQ1 e PQ2 siano uguali a k , cioè PQ1 = PQ2 = k al variare del punto P sulla retta l.

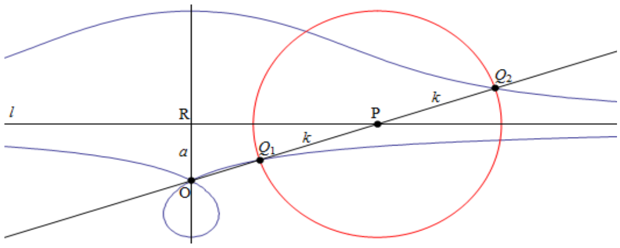

Illustrazione 12: Costruzione della concoide di Nicomede

Ma quanta Matematica si nasconde dietro la Cupola, certamente per noi è stata una scoperta inaspettata!

Sitografia:

[1.]
http://eprints.bice.rm.cnr.it/4046/1/Boll.n12_Brunelleschi.pdf
[2.]
http://www.filippodiserbrunellesco.org/home/index.php?c=TU9ERUw=
[3.]
http://www.geometriefluide.com/pagina.asp?cat=brunelleschi&prod=invenzionibrunelleschiane
[4.]
http://www.encojournal.com/antico/2.html
[5.]
http://web.fisica.unina.it/biblio/AIFNapoli/CatoneCatenaria.pdf