SOLIDI PLATONICI

TRA MATEMATICA E CULTURA…

Alunni: Andrea Bisignano; Francesca Chianello; Sabatino Pignataro; Celeste Risuleo; Pamela Ritacco (Classe VB, a. s. 2012 – 2013, Liceo Scientifico "Enzo Siciliano", Bisignano CS.

Referente: Prof.ssa Franca Tortorella

POLIEDRI REGOLARI(SOLIDI PLATONICI)

Premessa

Un poligono avente i lati e gli angoli uguali è detto poligono regolare. Ad esempio sono poligoni regolari il triangolo equilatero e il quadrato. Chiamiamo, invece, poliedro regolare un solido convesso, racchiuso da facce regolari tutte tra loro uguali (ovvero da poligoni regolari), i cui angoli solidi siano tutti uguali. Per poliedro convesso intendiamo un poliedro tale che ogni coppia di suoi punti interni individui un segmento interamente costituito da suoi punti interni. I cinque poliedri regolari convessi sono chiamati anche solidi platonici (o solidi di Platone). Essi sono: il tetraedro, il cubo (o esaedro), l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.

Cenni storici

Il più antico scritto pervenutoci nel quale si citano i poliedri regolari è il Timeo di Platone. Ed è sia per questo ritrovamento sia per il ruolo fondamentale che giocano nella "fisica" elaborata da Platone che tradizionalmente i poliedri regolari sono chiamati Solidi Platonici. Tuttavia ci sono buone ragioni per ritenere che la scoperta delle cinque figure poliedriche sia dovuta alla Scuola Pitagorica del VI secolo a.C. L'esistenza del cubo, dell'ottaedro e del tetraedro non sorprende molto, data la particolare semplicità di queste figure. Diverso è il caso del dodecaedro e dell'icosaedro; la loro scoperta può esser fatta risalire al fatto che nella Magna Grecia (in Sicilia, in particolare) si rinvenivano con facilità bellissimi cristalli di pirite dalla forma di dodecaedro. Infatti, sono stati rinvenuti, in vari siti archeologici italiani, oggetti scolpiti con questa forma regolare, databili intorno al VI sec. a.C. Platone nel suo dialogo, Timeo, associa il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro rispettivamente a quelli che erano allora ritenuti i quattro elementi fondamentali: fuoco, aria,terra e acqua. Il dodecaedro veniva invece associato all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta quintessenza. Certamente Platone non è il primo a meditare sugli elementi fondamentali della natura, ma la novità che porta è la seguente: le figure geometriche e il numero sono origine delle cose, del cielo e del tempo; il principio armonico alla base della teoria dei quattro corpi è dunque la proporzione e il principio geometrico viene detto essere il triangolo.

Caratteristiche dei poliedri regolari

I solidi platonici hanno le seguenti proprietà:

- le facce sono tutte poligoni regolari uguali;
- i vertici giacciono tutti su una sfera;
- gli angoli diedri sono tutti uguali;
- tutti i vertici sono circondati dallo stesso numero di facce.

Contiamo le facce, gli spigoli e i vertici

Solido	*facce (F)*	*spigoli (S)*	*vertici (V)*
tetraedro	*4*	*6*	*4*
cubo	*6*	*12*	*8*
ottaedro	*8*	*12*	*6*
dodecaedro	*12*	*30*	*20*
icosaedro	*20*	*30*	*12*

La formula di Eulero
Osservando i dati della tabella, si ricava facilmente la seguente relazione:
V = S - F + 2
che è detta formula di Eulero, dal nome Leonard Euler, il grande matematico svizzero del 1700.

Più in generale, la formula di Eulero afferma che per l'intera classe dei poliedri convessi, ma anche per la più vasta gamma dei poliedri a superficie semplicemente connessa (detto banalmente, quei poliedri che non presentano "buchi" o "manici"), vale l'uguaglianza:
F - S + V = 2

Perché esistono solo 5 tipi di poliedri regolari?

Affinché un poliedro sia regolare,le facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno 3. Inoltre,la somma delle facce di un angoloide deve essere minore di 360°(secondo un noto teorema di geometria solida).

Se le facce del poliedro regolare sono triangoli regolari,l’angolo di ogni faccia è di 60°,quindi si possono avere angoloidi di 3,4,5 facce al massimo,perché se fossero 6 o più di 6 la loro somma sarebbe uguale o maggiore di 360°. Quindi possono esistere solo 3 tipi di poliedri regolari a facce triangolari:quelli i cui angoloidi sono triedri,tetraedri e pentaedri. Se le facce di un poliedro regolare sono quadrati,ogni angolo è di 90°,quindi un poliedro limitato dai quadrati può avere solo angoloidi di 3 facce,perché se avesse angoloidi di 4 o più facce,la somma delle facce sarebbe uguale a 360°. Dunque esiste un solo tipo di poliedro a facce quadrate,quello avente gli angoli triedri. Inoltre vi può essere un solo tipo di poliedro regolare avente le facce pentagonali,i cui angoli sono triedri poiché l'ampiezza di un pentagono regolare è di 108°. Se le facce fossero esagoni regolari,i cui angoli sono di 120°,il poliedro non potrebbe esistere perché la somma delle facce concorrenti in un vertice sarebbe uguale o maggiore di 360°.

Proprietà combinatorie dei solidi platonici

Un poliedro convesso è un solido platonico se e solo se:
tutte le sue facce sono poligoni regolari convessi congruenti,nessuna delle sue facce interseca le altre se non negli spigoli,e in ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce.

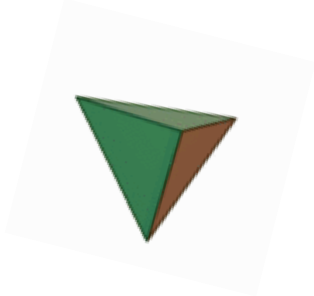
Ogni solido platonico può essere anche connotato da una notazione{p,q} dove

p = il numero di lati di ogni faccia(o il numero di vertici di ogni faccia) e

q = il numero di facce che si incontra in ogni vertice(o il numero di spigoli che si incontrano in ogni vertice).
La sigla {p,q},dà una descrizione combinatoria del poliedro.

Dualità e simmetrie dei solidi platonici

La dualità poliedrale,cioè la trasfigurazione di un poliedro in un secondo poliedro che presenta rispettivamente i vertici,gli spigoli e le facce corrispondenti alle facce,agli spigoli e ai vertici del primo e che presenta le conseguenti relazioni di incidenza fra questi tre tipi di oggetti,è una involuzione che trasforma tetraedri in tetraedri e scambia cubi con ottaedri e dodecaedri con icosaedri.
La elevata regolarità di solidi platonici si rispecchia nel fatto che ciascuno di essi ha associato un esteso gruppo di simmetria.



TETRAEDRO

- In geometria, un tetraedro è un poliedro con quattro facce. Un tetraedro è necessariamente convesso, le sue facce sono triangolari, ha 4 vertici e 6 spigoli. Analogamente si può definire come solido con 4 vertici o 6 spigoli. Viene chiamato anche tetragono (da Dante).
- Il tetraedro si può definire anche come simplesso tridimensionale, vale a dire come il solido tridimensionale col minor numero di vertici.
- Il tetraedro regolare è uno dei cinque solidi platonici, cioè uno dei poliedri regolari e le sue facce sono triangoli equilateri. Esso presenta un angolo diedro di 70° 32'.

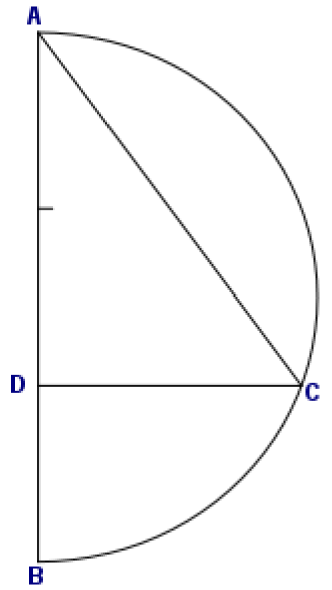
PARAMETRI METRICI : Alcuni parametri metrici del tetraedro regolare con spigoli di lunghezza a sono i seguenti

Altezza (cioè distanza fra vertice e faccia opposta)	$\sqrt{6}a/3$
Angolo diedrale	$\arccos(1/3)$ (circa 71°)
Area della superficie totale	$a^2\sqrt{3}$
Volume	$\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$

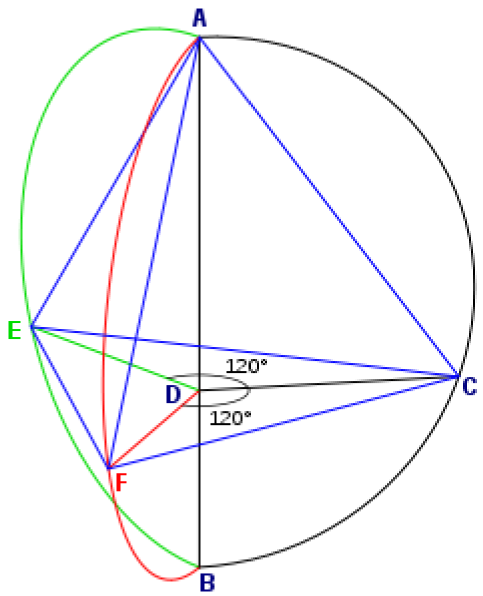
La costruzione di Euclide

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide descrive il metodo per inscrivere un tetraedro regolare in una sfera di diametro dato. La costruzione descritta da Euclide è la seguente:

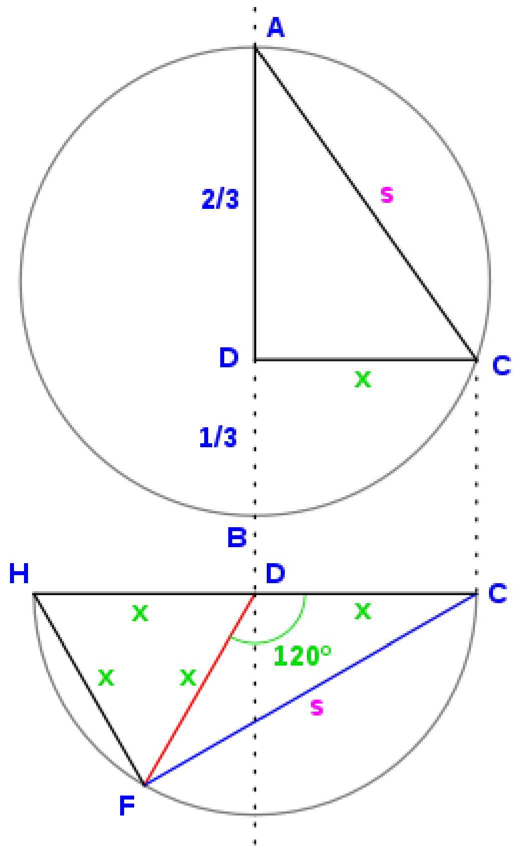
- Sia AB (vedi Fig. 1) un diametro della sfera data; lo si divida nel punto D in modo che AD sia il doppio di DB. Su questo diametro si costruisca un semicerchio, si alzi la perpendicolare da D e si denoti con C il punto di intersezione tra tale perpendicolare e le circonferenza. Infine, si congiungano i punti AC



- Si replichi la stessa costruzione su due piani passanti per AB, con angolo diedro di 120° rispetto al piano iniziale (Fig. 2). Si traccino infine le congiungenti fra i punti CE, CF ed EF.



- È chiaro che i vertici A, C, E ed F si trovano sugli archi di cerchio costruiti sul diametro AB, quindi si trovano tutti sulla superficie della sfera di pari diametro. Per costruzione gli spigoli AC, AE ed AF sono uguali fra loro, così come lo sono gli spigoli CE, CF ed EF (questi ultimi determinano il triangolo equilatero alla base del tetraedro). Rimane da verificare che questi due gruppi di spigoli abbiano la stessa lunghezza.



- Supponendo che il diametro del cerchio sia unitario, risulta che tali segmenti hanno le lunghezze indicate in figura, quindi:

AD : x = x : DB,

2/3 : x = x : 1/3,

$x^2 = 2/9$.

Grazie al teorema di Pitagora si può ora calcolare la lunghezza del segmento AC o, per praticità, il suo quadrato:

$$AC^2 = x^2 + AD^2 = 2/9 + (2/3)^2 = 2/9 + 4/9 = 6/9 = 2/3.$$

La parte inferiore del disegno raffigura la base del tetraedro. Il segmento CF è cateto del triangolo HCF rettangolo in F, quindi:

$$CF^2 = HC^2 - HF^2 = (2\cdot x)^2 - x^2 = 3\cdot x^2 = 3\cdot(2/9) = 6/9 = 2/3.$$

Di conseguenza, i tre spigoli alla base del tetraedro e i tre spigoli che fanno capo al vertice A, hanno tutti la stessa lunghezza s = AC = CF = 2/3 e quindi il poliedro costruito è effettivamente inscritto nella sfera data. Si noti inoltre come da questi calcoli segua anche che il quadrato di un qualsiasi spigolo del tetraedro è pari a 2/3 del quadrato del diametro AB.

Simmetrie

Il tetraedro ha 24 simmetrie:

- Ogni permutazione dei 4 vertici è infatti realizzata da un'unica simmetria. Il gruppo di simmetria è quindi il gruppo S_4 di permutazioni di 4 elementi, di cardinalità $4! = 24$. Tra queste, 12 sono rotazioni intorno ad alcuni assi, mentre le altre 12 invertono l'orientazione dello spazio.
- Le 12 simmetrie rotatorie (inclusa l'identità) formano un sottogruppo, isomorfo al gruppo alternante A_4. L'asse di rotazione di una simmetria può collegare il centro di una faccia con un vertice opposto (4 possibilità), oppure i punti medi di due spigoli opposti (3 possibilità). Intorno ad un asse del primo tipo possono essere effettuate rotazioni di 120° o 240°, mentre intorno ad un asse del secondo tipo la rotazione è di 180°. In totale, si ottengono quindi $2 \times 4 + 3 = 11$rotazioni, cui va aggiunta l'identità per ottenere tutte le 12 simmetrie rotatorie.

Numerando i vertici del tetraedro con 1, 2, 3 e 4, le rotazioni di 120° e 180° corrispondo alle permutazioni

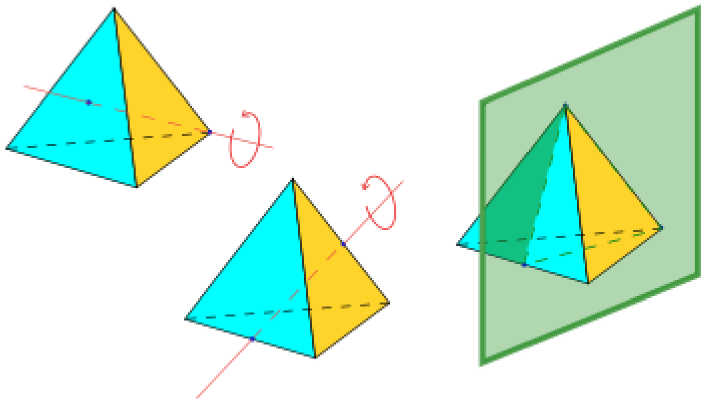
$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$$

ovvero ai cicli di ordine 3. Le rotazioni di 180° invece corrispondono alle permutazioni

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

ottenute come prodotto di due cicli indipendenti.

Delle 12 simmetrie che non preservano l'orientazione, 6 sono riflessioni lungo piani: ciascun piano contiene uno spigolo e il punto medio dello spigolo opposto (come nella figura a destra). Queste corrispondono ai cicli di ordine due



$(12),(13),(14),(23),(24),(34)$

Infine, le altre 6 simmetrie sono composizioni di riflessioni lungo piani e rotazioni, e corrispondono ai cicli di ordine 4

$$(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432).$$

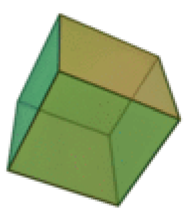
Curiosità

Esiste un curioso aneddoto riguardo Albert Einstein: ad un convegno di fisici, subissato dalle critiche per la sua balzana concezione di uno spazio-tempo a quattro dimensioni, egli propose il seguente problema:

Dati sei stuzzicadenti, costruire 4 triangoli equilateri.

Nessuno dei presenti riuscì a posizionare su di un piano gli stuzzicadenti per formare i triangoli richiesti, il che è infatti impossibile, al che Einstein compose un tetraedro coi sei stuzzicadenti e disse:

“Se non sapete usare la terza dimensione, che sperimentate tutti i giorni, come sperate di capire la quarta?”



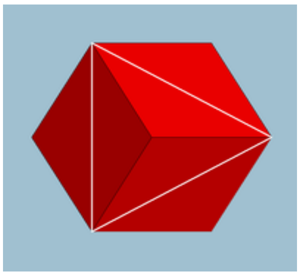
CUBO

In geometria il cubo o esaedro regolare è un solido platonico che presenta 6 facce quadrate, 8 vertici e 12 spigoli; in ogni vertice si incontrano tre spigoli i quali sono ortogonali due a due; in ogni vertice si intersecano anche tre facce le quali sono a due a due ortogonali; questo si accorda con il fatto che il poliedro duale del cubo è l'ottaedro, che presenta 8 facce triangolari, 6 vertici e 12 spigoli.

Il cubo è il solo tra i solidi platonici che, con sue repliche, è in grado di riempire lo spazio con regolarità, cioè di fornire una tassellazione dello spazio. Godono della stessa proprietà anche i due solidi semiregolari, della stessa famiglia del cubo, il prisma triangolare regolare ed il prisma esagonale regolare, nonché il solido archimedeo detto dodecaedro rombico.

Simmetrie

Il cubo ha lo stesso tipo di simmetrie dell'ottaedro, suo duale. Ha 24 simmetrie rotazionali, cioè che preservano l'orientazione dello spazio, più altre 24 simmetrie che non la preservano. Il gruppo di simmetria del cubo consta quindi di un totale di 48 elementi. Il sottogruppo dato dalle 24 rotazioni è isomorfo al gruppo delle permutazioni di 4 elementi. Vi è infatti esattamente una rotazione che realizza ogni possibile permutazione delle 4 coppie di vertici opposti. Il gruppo totale di simmetria è isomorfo al prodotto di con un gruppo ciclico con 2 elementi.



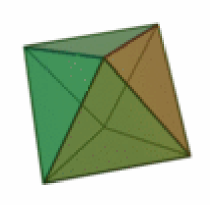
Tetraedri in un cubo

In un cubo può essere inscritto un tetraedro i cui vertici sono 4 degli 8 vertici del cubo stesso. Gli 8 vertici del cubo possono essere infatti suddivisi in due insiemi: nella descrizione con numeri binari, i vertici con somma delle coordinate pari ed i vertici con somma delle coordinate dispari. Ciascuna di queste quaterne individua un tetraedro, avente i vertici nella quaterna, ed i cui 6 spigoli sono diagonali delle 6 facce quadrate del cubo.

Cubi in un dodecaedro

In modo analogo si vede che in un dodecaedro si possono inscrivere 5 cubi ciascuno dei quali ha gli spigoli che sono diametri di una faccia pentagonale del dodecaedro. Si osserva infatti che il dodecaedro ha 12 facce e che ogni faccia ha 5 diametri per un totale di 60 diametri superficiali, tutti della stessa lunghezza. Questi diametri si possono ripartire in 5 classi di 12 diametri ciascuna: i cinque diametri di una faccia

sono assegnati a classi diverse e ogni classe è formata da diametri provenienti dalle 12 diverse facce.
Ciascuna di queste classi costituisce l'insieme degli spigoli di un cubo inscritto nel dodecaedro. Se si considera l'unione dei cinque cubi che si possono ottenere in questo modo da un dodecaedro dato, si ottiene un poliedro composto regolare, detto cinque cubi nel dodecaedro.



OTTAEDRO

In geometria solida, l'ottaedro è un poliedro con otto facce triangolari. L'ottaedro regolare è uno dei cinque solidi platonici, le cui facce sono triangoli equilateri. Ha sei vertici e dodici spigoli.
Il poliedro duale di un ottaedro è il cubo.

Area e volume

L'area A di superficie e il volume V dell'ottaedro regolare il cui spigolo ha lunghezza a sono date da:

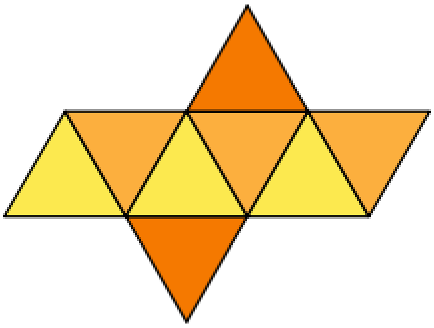
$$A = 2\sqrt{3}a^2 \approx 3.46410162a^2$$
$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2}a^3 \approx 0.471404521a^3$$

Il volume è 4 volte quello di un tetraedro regolare con spigoli di lunghezza a, mentre l'area di superficie è il doppio (poiché è formata da 8 triangoli equilateri, contro i 4 del tetraedro)

L'angolo diedrale dell'ottaedro regolare è arc cos(-1/3), pari approssimativamente a 109.47122°.

Coordinate e cartesiane

Un ottaedro regolare nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ può essere traslato in modo da avere il centro nell'origine, e dopo opportune rotazioni e similitudine ha i 6 vertici in

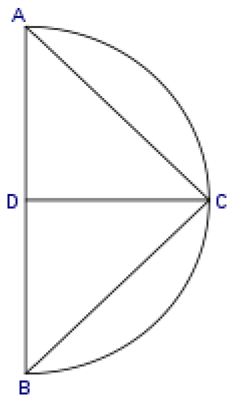


$$
\begin{aligned}
&(\pm 1, 0, 0), \\
&(0, \pm 1, 0), \\
&(0, 0, \pm 1).
\end{aligned}
$$

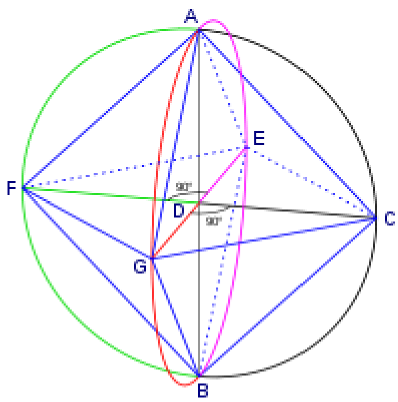
La costruzione di Euclide

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide descrive il metodo per inscrivere un ottaedro regolare in una sfera di diametro dato. La costruzione descritta da Euclide è la seguente:

- Sia AB il diametro della sfera data; si trovi il suo punto medio D e si tracci un semicerchio di centro D e raggio DA. Si alzi la perpendicolare da D, determinare il punto C sulla circonferenza e infine si congiungano i punti AC CB.



- Si replichi la stessa costruzione sui tre piani passanti per AB con angolo diedro di 90°, 180° e 270° rispetto al piano iniziale. Si traccino infine le congiungenti fra i punti CE, EF, FG e GC.



- È chiaro che i vertici A, C, E, F e G si trovano sulle semicirconferenze costruite sul diametro AB, quindi si trovano tutti sulla superficie della sfera di pari diametro. Per costruzione gli spigoli che partono dai vertici A e B sono uguali fra loro; ma anche gli spigoli CE, EF, FG e GC hanno la stessa lunghezza: infatti tutti gli spigoli dell'ottaedro risultano essere ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono raggi della sfera.
- Per quanto riguarda il rapporto fra diametro della sfera spigolo dell'ottaedro inscritto, per il teorema di Pitagora il quadrato costruito sullo spigolo è doppio del quadrato costruito sul raggio della sfera; di conseguenza il quadrato costruito sul diametro è doppio del quadrato costruito sullo spigolo.

Simmetrie

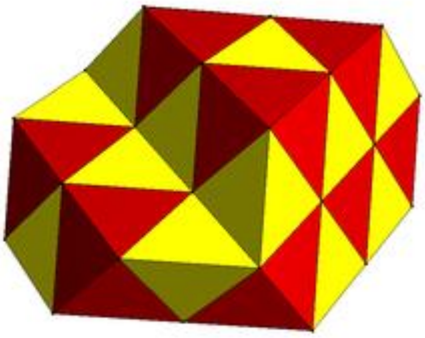
L'ottaedro ha 24 simmetrie rotazionali, cioè che preservano l'orientazione dello spazio, più altre 24 simmetrie che non la preservano. Il gruppo di simmetria dell'ottaedro consta quindi di un totale di 48 elementi.

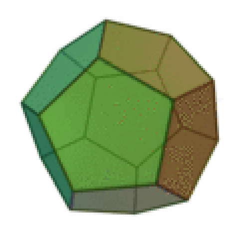
Il sottogruppo dato dalle 24 rotazioni è isomorfo al gruppo S_4 delle permutazioni di 4 elementi. Vi è infatti esattamente una rotazione che realizza ogni possibile permutazione delle 4 coppie di facce opposte.

Il gruppo totale di simmetria è isomorfo al prodotto $S_4 \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ di S_4 con un gruppo ciclico con 2 elementi.

Tassellazioni

L'ottaedro regolare non genera da solo una tassellazione dello spazio, perché i suoi angoli diedrali non sono divisori di 360°. Ne genera una però in combinazione con il tetraedro, come mostrato in figura.





Dodecaedro

In geometria solida il dodecaedro è un poliedro con dodici facce. Generalmente con questo termine si intende però il dodecaedro regolare: nel dodecaedro regolare le facce sono pentagoni regolari che si incontrano in ogni vertice a gruppi di tre.

Solido platonico

Il dodecaedro regolare è uno dei cinque solidi platonici. Ha quindi un grande numero di simmetrie. Ha 20 vertici e 30 spigoli. Il suo poliedro duale è l'icosaedro, anch'esso solido platonico.

Area e volume

L'area e il volume di un dodecaedro il cui spigolo ha lunghezza a sono date rispettivamente da:

$$A = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}},$$
$$V = \tfrac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3.$$

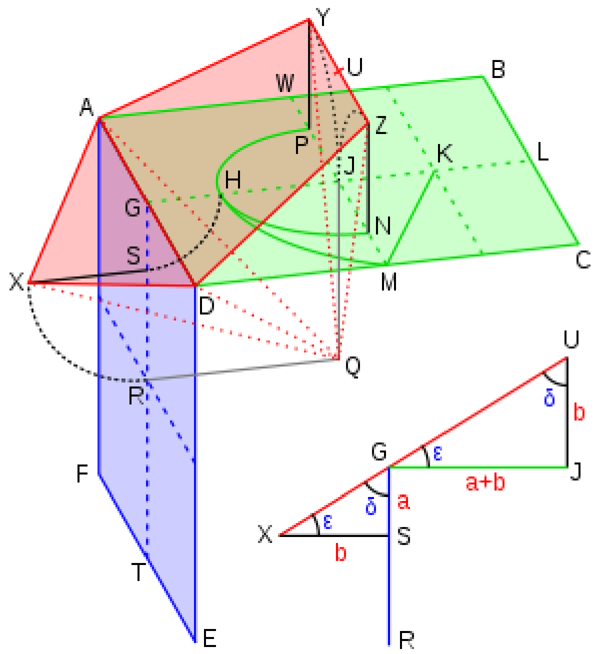
oppure approssimando:

$$V = 7,663s^3$$

La costruzione di Euclide

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide descrive il metodo per inscrivere un dodecaedro regolare in una sfera di diametro dato. La costruzione si basa sul fatto che, scelti opportunamente 8 dei 20 vertici di un dodecaedro regolare, questi sono anche i vertici di un cubo inscritto nella stessa sfera. La costruzione di Euclide è la seguente:

- Si inscriva un cubo nella sfera data e si considerino due facce adiacenti, ABCD e ADEF, di tale cubo (vedi Fig. 1). Siano poi T, G, L, W ed M i punti medi di EF, AD, BC, AB e CD rispettivamente e R e J i punti medi di GT e GL. Infine, si tracci il cerchio di raggio KM e centro K, determinando così il punto H. Con raggio HJ e centro in J si determinano i punti P e N sul segmento MW. Sia poi H il più vicino a G tra i due punti di intersezione tra la circonferenza e GL; si può verificare che H divide GJ in "media ed estrema ragione", ovvero è tale che il rapporto tra HJ e GJ è la sezione aurea. Infine, sia S il punto di GT tale che GS = GH.



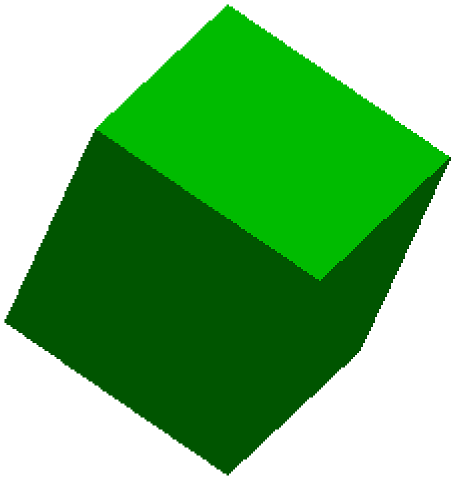
Si tracci le semiretta uscente da S e perpendicolare alla faccia ADEF e si determini il punto della semiretta X di distanza JH (=SR) da S. Si faccia lo stesso dai punti P ed N (stavolta rispetto alla faccia ABCD), determinando i punti Y e Z. I punti A, D, X, Y, Z andranno a formare i vertici di una faccia del pentagono.

A seguito delle istruzioni per la costruzione suddetta, Euclide dimostra con un lungo ragionamento che i punti X, Y e Z, assieme ai punti A e D, sono i vertici di uno dei pentagoni regolari che costituiscono il dodecaedro (i cui lati sono disegnati in rosso). Eccone alcuni accenni:

Per prima cosa occorre dimostrare che i cinque punti indicati sono complanari, cosa che si verifica facilmente guardando la proiezione laterale che compare in basso a destra nella figura 1. In tale figura sono riportati solo i punti appartenenti al piano che passa per le linee TG e GL (il punto U è il punto medio del lato YZ del pentagono). I segmenti di lunghezza a e b sono stati ottenuti come sezione aurea del segmento a+b (metà dello spigolo del cubo); tenendo presente la definizione classica di sezione aurea a : b = b : a+b, è immediato che i triangoli GSX e GJU sono simili, quindi sono uguali fra loro gli angoli ε. Di conseguenza, i segmenti XG e GU sono allineati su un'unica retta, e quindi i cinque punti del pentagono giacciono su un unico piano.

Il fatto che i cinque lati del pentagono sono uguali fra loro si può verificare applicando ilteorema di Pitagora; a questo proposito, basta verificare che YZ è uguale a uno qualunque degli altri lati, che sono per forza uguali fra loro: infatti ciascuno dei lati ZD, DX, XA e AY risulta essere diagonale di un parallelepipedo i cui spigoli sono a, b e a+b (relativamente al lato ZD: gli spigoli del parallelepipedo di cui è diagonale sono a=MN, b=NZ e a+b=DM).

Occorre infine verificare che gli angoli interni del pentagono siano uguali fra loro e questo può essere dimostrato per via indiretta, sempre grazie al teorema di Pitagora. Si può verificare infatti che le distanze di ciascun vertice dal punto centrale Q della sfera (nonché del cubo e del dodecaedro) sono tutte uguali fra loro, e da questo segue che i vertici del pentagono si trovano su una circonferenza il cui centro è la proiezione del punto Q sul piano del pentagono AYZBX: quindi il pentagono stesso, avendo i lati uguali e i vertici che stanno su una circonferenza, è regolare. Ma il fatto che le distanze dei vertici del pentagono dal centro Q della sfera sono tutti uguali dimostra anche che i vertici del pentagono stanno sulla superficie della sfera in cui si deve inscrivere il dodecaedro.



Storia

Come gli altri solidi platonici, il dodecaedro è stato oggetto di studio dei filosofi fin dall'antichità. Fra questi, Pitagora e Platone. Quest'ultimo, nel Timeo, associò ad ognuno dei 5 solidi platonici un elemento: dopo il fuoco, la terra, l'aria e l'acqua, al dodecaedro fu assegnata l'"etere" o "quintessenza" che componeva i corpi celesti e l'anima. Secondo il filosofo, il cosmo aveva la forma del dodecaedro.

Simmetrie

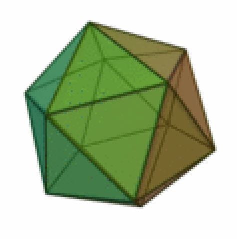
Il dodecaedro possiede 120 simmetrie. Il gruppo di simmetria dell'icosaedro è quindi fatto di 120 elementi: è isomorfo al prodotto $A_5 \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ del gruppo alternante A_5 di ordine $5!/2 = 60$ e del gruppo ciclico di ordine 2. Le 60 rotazioni formano il sottogruppo $A_5 \times \{0\}$, isomorfo ad A_5.

Le 60 rotazioni sono di vario tipo:

1. Rotazione di 360/5 = 72° (cioè $2\pi/5$ radianti) intorno ad un asse che unisce i centri di due facce opposte;
2. Rotazione di 360/3 = 120° (cioè $2\pi/3$ radianti) intorno ad un asse che unisce due vertici opposti;
3. Rotazione di 360/2 = 180° (cioè π radianti) intorno ad un asse che unisce i punti medi di due spigoli opposti.

Oltre a queste, vi sono anche le rotazioni ottenute componendo più volte una rotazione lungo lo stesso asse: in questo modo è possibile ad esempio ottenere gli angoli 72°, 144°, 216° e 288° in una rotazione del primo tipo. Quindi vi sono $6 \times 4 = 24$ rotazioni del primo tipo (4 angoli possibili per ognuna delle 6 coppie di facce opposte), $2 \times 10 = 20$ rotazioni del secondo tipo (2 angoli 120° e 240° per ognuna delle 12 coppie di vertici opposti) e 15 rotazioni del terzo tipo. In totale, $24 + 20 + 15 = 59$, cui va aggiunta l'identità per ottenere un totale di 60.

L'icosaedro ha lo stesso gruppo di simmetrie. Altri solidi hanno questo gruppo di simmetria: tra questi, l'icosaedro troncato, che modellizza il pallone da calcio.



ICOSAEDRO

In geometria l'icosaèdro (dal latino icosahedrum, dal greco eikosi, che significa venti, e edra, che significa base) è un qualsiasi poliedro con venti facce. Con il termine icosaedro si intende però generalmente l'icosaedro regolare: nell'icosaedro regolare, le facce sono triangoli equilateri. Il suo poliedro duale è il dodecaedro.

Area e volume

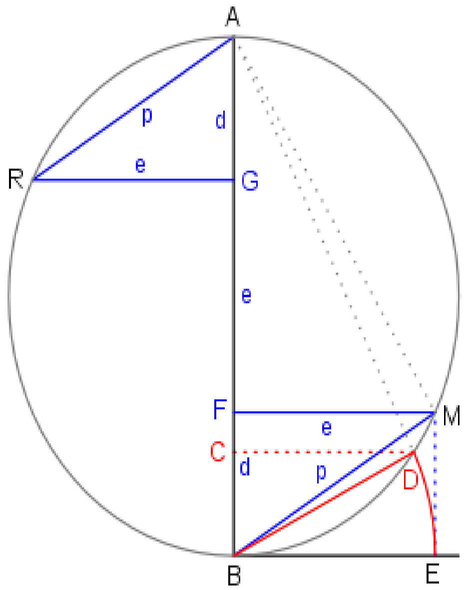
L'area della superficie A ed il volume V di un icosaedro regolare i cui spigoli hanno lunghezza a sono date dalle seguenti formule:

$$A = 5\sqrt{3}a^2,$$
$$V = \frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right) a^3.$$

La costruzione di Euclide

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide descrive il metodo per inscrivere un icosaedro regolare in una sfera di diametro dato. La costruzione descritta da Euclide, lievemente semplificata, è la seguente:

- Sia AB un diametro della sfera data; lo si divida nel punto C in modo che il segmento AC sia quattro volte il segmento CB (vedi Fig. 1). Si costruisca poi su AB un cerchio, si alzi la perpendicolare da C e si denoti con D uno dei due punti di intersezione tra tale perpendicolare e il cerchio. Infine, si congiungano i punti B e D: il segmento ottenuto è il raggio di quello che Euclide chiama "Cerchio su cui si descrive l'icosaedro".



- Si tracci la perpendicolare al diametro AB passante per B (e giacente sul piano contenente il cerchio) e sia E uno dei due punti su tale perpendicolare tali che BD e BE abbiano uguale lunghezza. Si tracci quindi la retta passante per E e parallela ad AB e si denoti con M uno dei due punti di intersezione tra la retta e la circonferenza; infine si denoti con F l'intersezione tra AB e la parallela a BE passante per M e si traccino i segmenti FM e BM. Si ripeta quindi lo stesso procedimento partendo da A, trovando quindi il punto R antipodale ad M ed il punto G del diametro tale che AG=FB.

Le lunghezze di tutti questi segmenti si possono ricavare semplicemente applicando il secondo teorema di Euclide e il teorema di Pitagora; di seguito forniamo i valori delle loro lunghezze, una volta supposto che la sfera di partenza avesse diametro unitario.

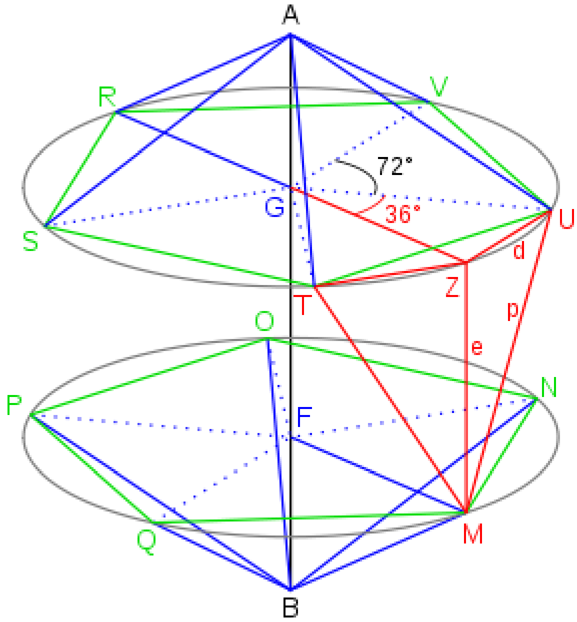
Segmento	Lunghezza	Note
AB	1	Diametro della sfera in cui si vuole inscrivere l'icosaedro

AC, BC	$\frac{4}{5}, \frac{1}{5}$	
CD	$\frac{2}{5}$	Il triangolo ADB è rettangolo in D, CD è medio proporzionale fra AC e CB, ovvero fra 4/5 e 1/5
e BD, BE FM, RG	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	Ipotenusa del triangolo BCD che è rettangolo in C
d FB, AG	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$	Il triangolo AMB è rettangolo in M: si calcola la proporzione FB: FM = FM: (1 - FB), FB coincide con il lato di un decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio e
p AR, BM	$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}$	Ipotenusa del triangolo BFM che è rettangolo in F, FM coincide con il lato di un pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio e
GF	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	GF = AB - AG - FB. Coincide con e

Dalla tabella qui sopra si evince quanto segue:

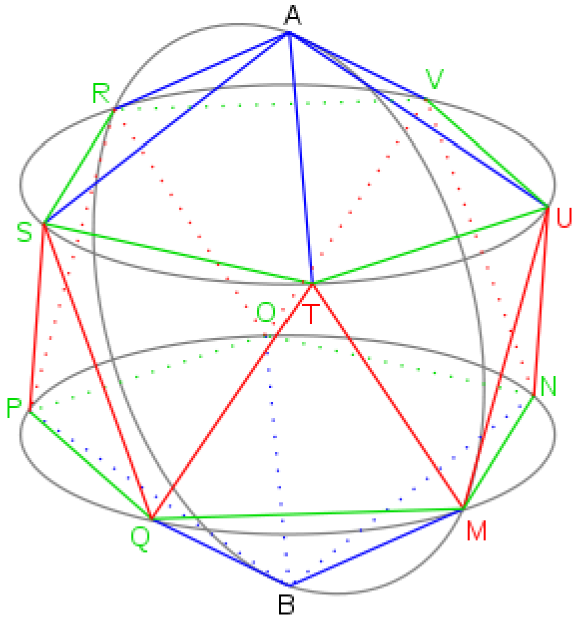
- e è il lato dell'esagono, p del pentagono e d del decagono inscritti in un cerchio di raggio e,
- e, p e d sono lati di un triangolo rettangolo, come dimostrato da Euclide nel libro XIII dei suoi elementi,
- e coincide anche con il segmento GF.

- Proseguendo con la costruzione, si replichi la costruzione delle linee BM MF, e AR RG, su quattro piani passanti per AB, con angolo diedro di 72° rispetto al piano iniziale (Fig. 2). Congiungendo in sequenza i punti M N O P Q, e R S T U V, si ottengono due pentagoni regolari inscritti nei cerchi di raggio e di centri F e G rispettivamente. Tutti i lati di questi pentagoni, come tutti i segmenti che partono dai punti A e B, hanno la stessa lunghezza, p, pari al lato del pentagono inscritto nel cerchio di raggio e (appunto il "Cerchio su cui si descrive l'icosaedro").



Rimane da verificare che la lunghezza delle congiungenti alternate fra i vertici dei due pentagoni sia pari a p. Sia Z il punto della circonferenza di centro G determinato prolungando il raggio RG. Chiaramente Z divide l'arco TU in due parti uguali e dunque le corde TZ e ZU sono uguali fra loro, e coincidono con il lato del decagono inscritto nel cerchio di raggio e. Ora gli angoli del poligono GZMF sono chiaramente tutti retti e, da quanto riportato nella tabella, si ha che i lati GF ed FM hanno la stessa lunghezza e quindi GZMF è un quadrato di lato e. Da ciò segue che il segmento TM è l'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti sono TZ (lato del decagono inscritto nel cerchio di raggio e) e ZM (lato dell'esagono inscritto nello stesso cerchio) e quindi la lunghezza di TM coincide anch'essa con il lato del pentagono inscritto nel cerchio di raggio e.

Ricapitolando (Fig. 3), si ha:



- i vertici M N O P Q, e R S T U V; si trovano tutti su archi di cerchio il cui diametro è AB (in figura è rappresentato solo il cerchio AMBR),
- i segmenti che partono dai vertici A e B (colorati in blu); i lati dei pentagoni M N O P Q e R S T U V (colorati in verde); e le diagonali alternate fra i vertici di questi due pentagoni (colorate in rosso) sono tutti spigoli dell'icosaedro, e hanno lunghezza pari al lato del pentagono inscritto nel cerchio di raggio e,
- il diametro AB della sfera in cui è inscritto l'icosaedro è quintuplo del quadrato del raggio e del "Cerchio su cui si descrive l'icosaedro",
- Per quanto riguarda la lunghezza dello spigolo, Euclide si limita a dimostrare che la sua lunghezza e il diametro della sfera sono incommensurabili. La lunghezza effettiva p è comunque calcolabile e, come riportato nella tabella, è

$$p = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}.$$

SIMMETRIE

L'icosaedro possiede 120 simmetrie. Di queste, 60 sono rotazioni, mentre le altre invertono l'orientazione dello spazio.

Il gruppo di simmetria dell'icosaedro è quindi fatto di 120 elementi: è isomorfo al prodotto $A_5 \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ fra il gruppo alternante A_5

di ordine $5!/2 = 60$ ed il gruppo ciclico di ordine 2. Le 60 rotazioni formano il sottogruppo $A_5 \times \{0\}$, isomorfo ad A_5.

Il dodecaedro ha lo stesso gruppo di simmetrie. Altri solidi hanno questo gruppo di simmetria: tra questi, l'icosaedro troncato, che modellizza il pallone da calcio.