Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

UGO CASSINA

Storia del triangolo aritmetico

È ben noto che si dà il nome di *triangolo aritmetico* alla figura:

$$
(1) \qquad \begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots ,
\end{array}
$$

formata scrivendo nelle successive orizzontali i coefficenti dei numeri a e b nello sviluppo di $(a + b)^n$ ove n è un numero intero positivo.

Alla formola:

$$(2) \qquad (a + b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r ,$$

alcuni autori danno impropriamente il nome di *binomio di* Newton [1] (1643-1727).

Gli A. italiani, in generale, attribuiscono a N. Tartaglia (n. a Brescia nel 1506, m. a Venezia nel 1557) la scoperta del triangolo aritmetico; quelli francesi a B. Pascal (n. a Clermont Ferrand nel 1623, m. a Paris nel 1662); e quelli tedeschi a M. Stifel (n. a Esslingen nel 1487 circa, m. a Jena nel 1559). Ma nessuno di questi nomi è appropriato.

Infatti, in Europa, noi troviamo il triangolo (1) in un'aritmetica tedesca di Petrus Apianus (a. 1527) e non — che io sappia — in opere anteriori. E, fuori d'Europa, trovasi in un algebra del matematico cinese Tschu-schi-kih (a. 1303); poi, un passo del matematico arabo

(1) A Newton si deve invece la scoperta della *serie binomiale* (a. 1676)

Omar Alkhayyami, (XI sec.) porta a concludere ch' egli conosceva già in molti casi particolari — od addirittura in generale — la formola (2).

Infine, un frammento pubblicato nell' ultimo volume delle *Opere* di Euclide — che J. Heiberg ha edito con cura e competenza così singolari — fa rimontare forse ad Euclide il merito della scoperta del triangolo aritmetico. Ciò fa forse arretrare di più di 13 secoli la data che era attualmente ritenuta come quella della sua scoperta.

Ma ecco quanto ho potuto raccogliere sull'argomento (¹).

Nel volume VIII (p. 290) delle opere di Euclide, edite da Menge et Heiberg, trovasi la seguente tavola:

	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι
δυαδικαὶ συζυγίαι		α	γ	ς	ι	ιε	κα	κη	λς	με
τριαδικαὶ συζυγίαι			α	δ	ι*	κ	λε	νς	πδ	ρκ
				α	ε	ιε	λε	ο	ρκς	σι
					α	ς	κα	νς	ρκς	σνβ
						α	ζ	κη	πδ	σι
							α	η	λς	ρκ
								α	θ	με
									α	ι
										α

* Quadratum vacuum

(¹) Cfr. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. II (2ª ed. 1900); P. Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra* (Parma, 1797-99, I vol.); G. Libri, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie* (Paris 1838, t. 3); H. Hankel, *Zur Gesehichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874); M. Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* (Paris, 1883-1888, t. 2°); J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik...* (Leipzig, 1902-903, vol. 2); S. Günther, *Geschichte der Mathematik* (I. Tl., Leipzig 1908); G. A. Miller, *Historical introduction to math. Literature* (New-York, 1916).

Essa è scritta in margine ad un codice vaticano che pare rimonti al secolo XIII. Non è sicuro che essa sia dovuta ad EUCLIDE; ma, ciò che è sicuro, è che essa è la più antica disposizione, ora a noi nota, dei coefficenti binomiali sotto forma di triangolo.

In questo triangolo greco, che dà i coefficenti dello sviluppo (2) nel caso in cui l'esponente assuma i primi 10 valori interi, i coefficenti binomiali sono disposti nelle singole verticali. Nelle orizzontali successive sono scritti, invece, i *numeri figurati.* L'A. accompagna la 2^a e la 3^a orizzontale colle parole *δυαδικαὶ συζυγίαι* (combinazioni binarie) e *τριαδικαὶ συζυγίαι* (combinazioni ternarie).

Lo scopo che l'A. di questo triangolo pare proporsi è quello di insegnare a trovare il numero delle combinazioni binarie, ternarie, ecc. di oggetti qualunque; cioè quello di giungere ad un risultato che, con le notazioni attuali, può esprimersi così:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1}\frac{n-r+1}{r} \quad ,$$

in cui n ed r sono numeri naturali (formola che alcuni A. attribuiscono a Briggs a. 1624). Infatti ecco la traduzione letterale di quanto egli scrive:

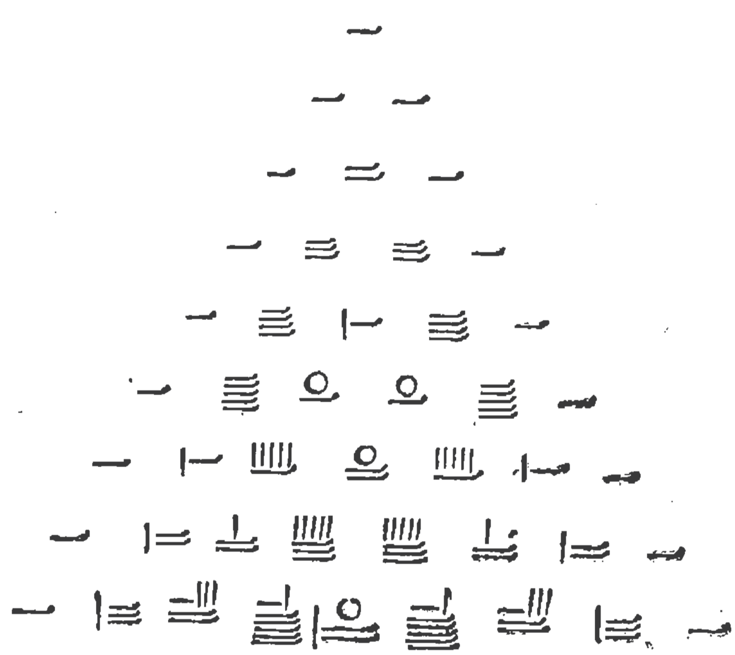
« Trovare le combinazioni binarie (*δυαδικαὶ συζυγίαι*) di qualsivoglia termini dati. Le troviamo così: Prendiamo il numero minore di 1 unità di quello dei termini dati e moltiplichiamolo per il suo vicino, che è maggiore di lui di 1 unità, e del prodotto ottenuto prendiamo la metà; e così abbiamo il numero desiderato delle combinazioni binarie dei dati termini. Le ternarie così: Prendiamo il numero minore di 2 di quello indicante il numero dei termini dati da principio e moltiplichiamolo per il risultato ottenuto per le combinazioni binarie dei termini dati da principio, e prendiamo la terza parte del risultato della moltiplicazione; e così abbiamo le combinazioni ternarie. E così di seguito ». (Op. c., p. 290).

In OMAR ALKHAYYAMI (di Nichabour), che lavorò intorno alla riforma del calendario del 1079, (*L'Algèbre*, par F. WOEPKE, Paris a. 1851; p. 13) si legge:

... « J'ai enseigné à trouver les côtés du carré-carré, du quadrato-cube, du cubo-cube, etc., à une étendue quelconque, ce qu'on n'avait pas fait précédemment. Les demonstrations que j'ai donnèes à cette occasion ne sont que des démonstrations arithmétiques »; e quindi — secondo Woepke — Omar avrebbe conosciuto la formola generale del binomio.

Però, negli scritti di questo A. a noi pervenuti, non trovasi la caratteristica disposizione a triangolo dei coefficenti binomiali.

Invece, in una aritmetica dovuta al matematico cinese Tschu-schi-kih (*Il prezioso specchio dei quattro elementi*, a. 1303), trovasi nuovamente la tavola (1). Qui riporto integralmente la disposizione usata da questo A.(1)



(Tschu-schi-kih, *Il prezioso specchio dei quattro elementi*, a. 1303).

ove, com'è evidente, i coefficenti binomiali sono disposti nelle singole orizzontali.

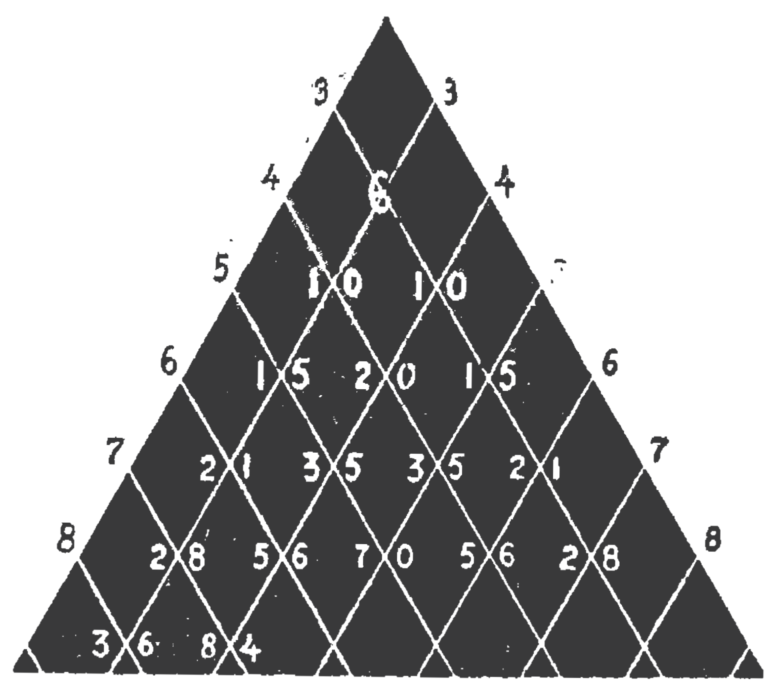
In Europa vediamo comparire decisamente il triangolo aritmetico sul principio del sec. XVI. In quel tempo, la scoperta del triangolo (1) doveva essere ormai matura in Europa, perchè diversi autori in diversi paesi l'hanno ritrovato quasi contemporaneamente e tutti si vantano — forse non a torto — di esservi giunti in modo indipendente l'uno dall'altro. (2)

---

(1) T. Boggio, *Lezioni di Algebra* (Lit. Genova a. 1908).

(2) Questa però non sembra l'opinione di M. Cantor, il quale — mentre ritiene probabile che Pascal, vissuto più di un secolo dopo Stifel e Tartaglia, abbia ritrovato per suo conto il triangolo aritmetico — taccia di impostore e addirittura di faccia di bronzo (*eiserne Stirn, Vorles.*, t. II, p. 491) il nostro Tartaglia quando egli afferma di aver trovato per suo conto la tavola (1).

Il testo stampato, che io credo più antico, del triangolo aritmetico trovasi sul frontespizio della prima edizione (a. 1527) di una aritmetica del matematico tedesco PETRUS APIANUS (1) (n. a Leisnig nel 1495, m. a Ingolstadt nel 1552). Tale aritmetica porta un lunghissimo titolo che incomincia così: « Eyn newe vnd wolgegründte vnderweisung aller Kauffmans Rechnung in dreien büchern mit schönen Regeln und fragstücken begriffen... ». Un fac simile di questo frontispizio trovasi nella pregevolissima *Rara Arithmetica* pubblicata da D. E. SMITH (Boston, a. 1909; p. 155). Il triangolo di APIANO, che qui riproduco, sta nella parte in basso, a sinistra, del frontispizio. A destra, in basso, trovasi invece abbozzato un abaco.



(PETRUS APIANUS, *Eyn newe und wolgegründte vnderweisung aller Kauffmans Rechnung...* Ingolstadt, a. 1527).

Una ventina d'anni dopo (a. 1544) il triangolo trovasi in M. STIFEL (*Arithmetica integra*, Authore Michale Stifelio, 1ª ed. Norimbergaê apud Joh. Petreium, Anno Cristi MDXLIII), il quale però lo scrive in modo diverso da quello seguito nel codice euclideo, dai cinesi, e da APIANO.

---

(1) Il nome tedesco di quest A., prof. di astronomia all'Università di Ingolstadt, è PETER BIENEWITZ.