SU ALCUNE QUESTIONI DELLA STORIA DELLA MATEMATICA GRECA

I Greci *importano* la geometria dall'Egitto; tramite della trasmissione è TALETE DI MILETO, che vive nel VI secolo a. C. Da questo punto di partenza si giunge a un punto di arrivo di singolare importanza costituito dagli *Elementi* di EUCLIDE, che possono dirsi composti intorno al 300 a. C.: punto di arrivo che rappresenta, a sua volta, premessa per le ulteriori grandi opere di ARCHIMEDE e di APOLLONIO.

La prima questione che sorge è quella della ricostruzione del cammino che la geometria greca ha percorso da Talete a Euclide, cioè in un periodo che abbraccia all'incirca due secoli e mezzo. È questo il problema dello sviluppo della geometria pre-euclidea, cioè quello della formazione degli *Elementi* di EUCLIDE, i quali come è ben noto, ben lungi dal costituire una « *proles sine matre creata* », rappresentano un punto di convergenza, una sintesi dello sviluppo anteriore.

Questo problema si presenta in forma particolarmente suggestiva, poichè se da un lato vi è scarsezza di documenti e di notizie, d'altro canto la scarsezza non giunge fino a tal punto da far considerare l'impresa come disperata.

Inoltre, per quanto si tratti di un periodo sul quale, a partire dal 1870 in poi, si è ovunque lavorato con grande alacrità da parte di studiosi di varie nazioni, pure si ricava l'impressione che ancora molto vi sia da fare e che non siano stati ancora utilizzati in modo completo i documenti a disposizione.[1]

La scarsezza dei documenti è senza dubbio dovuta in parte alla prepotente affermazione degli *Elementi* di EUCLIDE, opera che, in tempi in cui la selezione per la trasmissione ai posteri assume gli aspetti di una vera e propria inesorabile lotta, mette necessariamente in ombra le opere dei predecessori.

D'altra parte, il periodo che ci interessa non separa nettamente la matematica dalle altre discipline, cosicchè accade di trovare ele-

---

[1] Di parere sostanzialmente contrario, almeno per quanto riguarda i Pitagorici, sembra essere W. A. HEIDEL, in: *The Pythagoreans and Greek Mathematics*, « Amer. Journ. Philol. », 61, 1-33 (1940).

menti che arricchiscono la nostra conoscenza nel campo della storia della matematica anche in opere non strettamente tecniche, quali, ad esempio, quelle dei filosofi.

È certamente passato un ottantennio ben fecondo di ricerche dal 1870 ad oggi, cioè dalla pubblicazione del classico libro del Bretschneider,[1] il quale raccolse tutti i frammenti e le testimonianze che vennero a sua conoscenza sulla geometria pre-euclidea. Assai interessante ancora è il libro in questione perchè ci mostra lo stato degli studi sul nostro argomento in quel tempo. Basti citare questo esempio: il Bretschneider polemizza, a distanza di circa settant'anni, col venerando storico della matematica Montucla e gli rimprovera di aver dato un giudizio quanto mai superficiale (e contradittorio, attraverso varie opere) sopra le quadrature di parti del cerchio eseguite da Ippocrate di Chio: egli stesso dà trionfalmente per primo, riportandolo da un'edizione di Aldo Manuzio, il testo del brano di Simplicio (nel commento alla *Fisica* di Aristotele), riguardante quelle quadrature. Ed altre primizie egli dà ancora nell'opera, con un senso quasi di meraviglia per lo stato ancora così primordiale della sua disciplina.

Oggi, come s'accennava, si è giunti ad uno stadio ben più perfezionato nell'impiego delle fonti, la povertà delle quali impone la necessità di utilizzare al massimo ogni elemento a nostra disposizione. E la questione più delicata si presenta quando si deve fare una cernita, cioè quando si deve esprimere un giudizio sul valore delle fonti stesse. Ad esempio, per tutto quanto riguarda la scuola pitagorica, tutti sanno che le notizie a nostra disposizione sono per la maggior parte molto tarde e pertanto poco degne di fede e che, invece, sono scarsissime le notizie più antiche. Nessuno, naturalmente, presta fede alle romanzate vite di Pitagora dei secoli tardi. Tuttavia si è forse, specialmente da Paul Tannery,[2] esagerato nel negare valore a fonti che, per ragioni particolari, meritavano speciale attenzione: ad esempio al celebre *Riassunto* di Proclo.

È noto che Proclo scrisse un commento al primo libro di Euclide e che fece precedere detto commento da due introduzioni, in una delle quali si trova il famoso *Riassunto* o *Elenco dei geometri*, che dà per sommi capi una specie di stringatissima storia della geometria greca, da Talete fino a tutto il suo sviluppo fondamentale. Sennonchè Pro-

---

[1] C. A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer von Euklides. Ein historischer Versuch*, Lipsia, 1870.

[2] Paul Tannery, *La géométrie grecque: comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Parigi, 1887.

CLO vive nel V secolo dopo Cristo, e quindi ci dà notizie sull'opera di uomini vissuti all'incirca nove secoli prima.

Occorre, dunque, vedere a quali fonti, a sua volta, egli attinse. Qui abbiamo due tendenze: quella della *tradizione* e quella dell'*antitradizione*. La tradizione aveva attribuito il *Riassunto* di PROCLO a EUDEMO DI RODI, lo scolaro di ARISTOTELE, che, verso la fine del IV secolo a. C., scrisse, per incarico del Maestro, una storia della geometria. Naturalmente nel seguire il solco della tradizione si esagerò, poichè invece di pensare che il testo di EUDEMO avesse costituito soltanto il nucleo fondamentale, si affermò addirittura che tutto il *Riassunto* era stato senz'altro tolto di peso dal testo eudemiano, cosicchè venne considerato nè più nè meno che come un frammento di EUDEMO. Basti pensare che come tale lo dà senz'altro il MIELI nel suo *Manuale di Storia della Scienza* (« Antichità », Roma, 1925).

Ma già molti anni prima PAUL TANNERY (nella sua opera già citata) aveva scagliato i suoi fulmini contro la pretesa derivazione eudemiana del *Riassunto*.

Il lettore potrà con molto interesse rileggere quanto il TANNERY scrive su questo punto e si troverà di fronte all'affermazione precisa che il *Riassunto* di PROCLO risale a GEMINO.

Ed in questa posizione antitradizionalista si esagera pure: basti dire che ABEL REY, nella sua celebre opera *La jeunesse de la science grecque* (Parigi, 1933), riporta senz'altro il testo di PROCLO come frammento di GEMINO.

Non è il caso di rifare qui una esposizione particolareggiata della questione.[1] Mi limiterò a dire che mi sembra più sostenibile l'opinione secondo la quale PROCLO espone entro certi limiti personalmente, attingendo con libertà a fonti anteriori, tra le quali quella di EUDEMO, e che è fuori di dubbio che ai tempi di PROCLO e nel secolo seguente si avevano a disposizione estratti molto particolareggiati dell'opera di EUDEMO. Ce lo dimostra il fatto che SIMPLICIO, vissuto nel VI secolo d. C., nell'esporre la quadratura delle lunule di IPPOCRATE DI CHIO ci dice che egli citerà *letteralmente* le parole di EUDEMO, aggiungendo solo qualche chiosa esplicativa tratta dagli *Elementi* di EUCLIDE, allo scopo di facilitare la lettura: e che fa questo perchè lo stile di EUDEMO è, secondo l'uso degli antichi, stringatissimo, « a guisa di annotazione ».

Ad ogni modo, non sembra che la critica moderna abbia ancora detto una parola definitiva sul valore da attribuire al *Riassunto* di PROCLO.

---

[1] Il lettore che desideri maggiori notizie potrà trovarle nell'articolo: A. FRAJESE, *Talete di Mileto e le origini della geometria greca*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », serie II, anno IV, n. 1 (1941).

In particolare ci interessa quanto PROCLO dice a proposito di PITAGORA. Questi avrebbe trasformato la geometria in insegnamento liberale, *investigandone i principi dall'alto*, e si sarebbe occupato degli irrazionali (o delle proporzioni).

L'incertezza dell'ultima affermazione dipende dal fatto che non si è sicuri se il testo greco ci parli di *a l ò g o n* (irrazionali) oppure di *a n a l ò g o n* (proporzioni). Ma l'incertezza non è rilevante, poichè la teoria dei rapporti è naturalmente in istretta relazione con la scoperta degli irrazionali. Le questioni riguardanti questa scoperta costituiscono forse l'argomento centrale di ricerca per la storia della matematica pre-euclidea. È la scoperta stessa avvenuta ai tempi di PITAGORA o comunque dei primi pitagorici? Oppure è avvenuta più tardi per opera di TEODORO di Cirene, che fu maestro di PLATONE e che dal suo grande allievo fu immortalato nel dialogo *Teeteto*? Si limitò l'eventuale scoperta pitagorica alla dimostrazione dell'irrazionalità della $\sqrt{2}$, cioè della incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato? Rimase tale caso come una specie di scandalosa eccezione, secondo la tradizionale teoria di PAUL TANNERY? Questioni ardue intorno alle quali si svolse una memorabile polemica tra lo ZEUTHEN ed altri dotti, tra cui il VOGT. La fonte principale è qui costituita da un celebre brano del dialogo *Teeteto* sopra menzionato, che ci pone di fronte ad alcuni dati incontrovertibili, alcuni dei quali sono però di difficilissima interpretazione. Lo ZEUTHEN giunse alla conclusione che l'irrazionalità della $\sqrt{2}$ venne trovata dagli aderenti ad una primitiva scuola pitagorica se non da PITAGORA stesso: che le ricerche di TEODORO si trovano adombrate nella proposizione 2 del libro X degli *Elementi* di EUCLIDE (metodo del massimo comun divisore) e che nelle proposizioni 7-10 del libro stesso si trova invece esposto il metodo di TEETETO.

Ma contro l'attribuzione della scoperta alla primitiva scuola pitagorica mosse il FRANK, il quale nella sua ormai classica opera *Plato und die sogenanten Pythagoräer* negò a detta scuola ogni attività scientifica, riducendola ad una specie di setta a carattere mistico misterico.

Contro il punto di vista del FRANK prese a sua volta netta posizione l'ENRIQUES, il quale, in quella specie di nuova edizione del primo volume della *Storia del pensiero scientifico* che fu costituita dalla traduzione francese apparsa nei fascicoli dell'editore Hermann, fece presenti i motivi intrinseci per i quali egli manteneva la propria opinione aderente alla tradizione, insistendo principalmente sul motivo che, se non vi fossero stati degli antecedenti matematici notevoli, non si sarebbe potuta giustificare una trattazione matematica come quella che compose IPPOCRATE DI CHIO.

Lo stesso si dica per la splendida costruzione che ARCHITA DI TARANTO ci dà per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo: costruzione che non può assolutamente concepirsi all'alba della geometria.[1]

Il TANNERY, riconoscendo valore scientifico alla primitiva scuola pitagorica, interpretò i famosi argomenti di ZENONE contro il moto come diretti contro una teoria atomistica della linea che sarebbe stata sostenuta nella scuola pitagorica stessa.

Il FRANK, il quale volle porre l'inizio vero della geometria greca in un'epoca più tarda, fu costretto a rifiutare questa interpretazione, che pure sembrava la più naturale, e affacciò l'ipotesi che gli argomenti di ZENONE fossero diretti contro i veri e propri *atomisti*, cioè principalmente contro DEMOCRITO.

Sulla questione ritorna l'ENRIQUES nel suo ultimo libro (pubblicato postumo)[2] nel quale, dopo aver illustrata la poderosa opera matematica di DEMOCRITO, conclude portando, oltre al peso dei documenti e delle argomentazioni, anche quello della sua geniale intuizione, e nega recisamente la possibilità che DEMOCRITO sia stato atomista in geometria oltre che in fisica. « Perciò ripetiamo e concludiamo – scrive l'ENRIQUES – che DEMOCRITO, pure accogliendo ipotesi euristiche legate a considerazioni fisiche e saggiando criticamente i problemi delicati della continuità geometrica, non poteva ritenere come *matematicamente vero* l'atomismo spaziale; ciò che non hanno fatto nemmeno i propugnatori del metodo degli indivisibili, ARCHIMEDE nell'antichità e CAVALIERI nei tempi moderni. Nessun matematico che riconosca la mentalità del grande pensatore di Abdera, potrà conservare dubbi su questo punto! ».

E del resto, se vogliamo valutare bene quanto ARISTOTELE ci dice nel primo libro della *Metafisica* a proposito della scuola pitagorica, va osservato che gli argomenti del FRANK non sono poi affatto decisivi. Il FRANK dice che i Pitagorici di cui parla ARISTOTELE sono tardi: tanto è vero che ARISTOTELE li chiama i « *cosiddetti Pitagorici* », come se non avessero vero diritto di chiamarsi tali. Ma la traduzione della parola greca *kaloúmenoi* non viene esattamente data dalla nostra parola « *cosiddetti* » (tedesco « *sogenannten* »). Non c'è quel senso spregiativo

---

[1] Cfr. pure: J. H. ANDERHUB, *Genetrix irrationalium. Platonis Theaetetus* 147 *d*, ecc. Frankfurt, a. M. 1941; JOS. E. HOFMANN, *Ueber Herrn Anderhubs Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Theaetet.* « Deutsche Mathematik », 7, 117-120 (1942); A. FRAJESE, *I dialoghi di Platone e la storia della matematica.* « Sophia », anno XI, n. 1, 58-70 (1943); KURT VON FRITZ, *The discovery of inconmensurability by Hippasus of Metapontum,* « Ann. of Math. » (2), 46, 242-264 (1945).

[2] F. ENRIQUES e M. MAZZIOTTI, *Le dottrine di Democrito d'Abdera*, Bologna, 1948.

che la traduzione vorrebbe dare: ARISTOTELE viene soltanto a dirci che quei filosofi *furono chiamati* Pitagorici, oppure che *si chiamarono* Pitagorici. Il fatto era degno di nota: dopo l'elencazione dei filosofi precedenti e seguenti, per ognuno dei quali veniva tramandato il nome proprio, cosicchè riusciva immediata la distinzione dell'uno dall'altro, qui ARISTOTELE si trova di fronte al fatto nuovo di filosofi che non vengono ricordati col proprio nome, ma con quello del Maestro.[1]

In quest'ordine d'idee si giustifica facilmente la parola da ARISTOTELE adoperata. Nè poi è da dimenticare che la famosa tabella dei dieci contrari contiene alcune coppie di carattere innegabilmente matematico: *limitato-illimitato*, *diritto-curvo*, *uno-molteplice*, *dispari-pari*, *quadrato-a lati disuguali* (*rettangolo*). E per stabilire quando i Pitagorici abbiano fissata una tale tabella, le idee si chiariscono senz'altro leggendo quanto ARISTOTELE ci dice, dopo di aver riportato l'elenco delle dieci coppie di contrari (*traduzione Carlini*): « Questa pare essere stata l'opinione anche di ALCMEONE il Crotoniate, sia poi che egli prendesse tale dottrina da essi, o essi da lui: poichè, quanto all'età, ALCMEONE fiorì quando PITAGORA era già vecchio, e si espresse in termini simili a loro ».[2]

Comunque, senza che ci tratteniamo di più su questo argomento, sembra si possa confermare senz'altro che anche sulla questione pitagorica la critica moderna non ha ancora detto l'ultima parola e che, nel tentare di risolvere detta questione, gli studiosi della storia della matematica hanno ancora un vasto campo di ricerche da espletare: ricerche che potranno condurre a risultati forse imprevisti. Sembra in particolare che le opere di ARISTOTELE possano, sotto questo riguardo, costituire ancora una fonte da approfondire, nonostante i classici studi dello HEIBERG.[3]

Quale influenza esercitò la filosofia greca sullo sviluppo della matematica? Ecco un problema che può dirsi fondamentale tra i fondamentali. Su di esso le opinioni sono divise. Ricordo che l'ENRIQUES, in quella specie di *á g r a f a d ó g m a t a* che erano costituiti dalle

---

[1] Una interpretazione simile dà pure KURT VON FRITZ (op. cit.), il quale è contrario alle vedute del Frank.

[2] Oltre all'art. cit. di KURT VON FRITZ, cfr. anche: H. HASSE u. H. SCHOLZ, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Berlin Pan-Bücherei », 1928; G. JUNGE, *Die pythagoreische Zahlenlehre*, « Deutsche Math. », 5, 341-357 (1940); B. L. VAN DER WAERDEN, *Zenon und die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, « Math. Ann. », 117, 141-161 (1940); ID., *Zur pythagoreischen Algebra: Quadratwurzel und Kubikwurzel*, « Math. Ann. », 118, 286-288 (1941); ID., *Die Harmonielehre der Pythagoreer*, « Hermes », 78, 163-199 (1943); ID., *Die Arithmetik der Pythagoreer*, I, « Math. Ann. », 120, 127-153 (1948).

[3] J. L. HEIBERG, *Mathematisches zu Aristoteles*, « Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wissenschaften », XVIII, 1-49 (1904).

sue geniali conversazioni coi discepoli, si esprimeva spesso in senso negativo nei riguardi della detta influenza, e denotava come *esagerate* le opinioni dello ZEUTHEN in proposito, specie per quanto riguarda PLATONE e ARISTOTELE. Ben volentieri riconosceva, invece, l'influenza di DEMOCRITO, matematico egli stesso. Il problema in questione fu tra quelli affrontati dalla rivista « Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik ». Chi si vuole orientare sulla questione deve leggere buona parte degli articoli (talvolta poderosi) apparsi sulla rivista stessa.

E poi potrà essere proposta la domanda inversa, relativa all'influenza che la matematica possa aver esercitato sul pensiero filosofico. Si tratterebbe cioè della ricerca di un eventuale rapporto di azione e reazione, attraverso il quale filosofia e matematica influirono l'una sull'altra. Questione complessa, sulla quale dovrebbero, con cognizione di causa, intervenire i cultori di storia della filosofia.[1]

Sui problemi accennati, l'esame dell'opera principale di EUCLIDE, che appare forse un cinquantennio dopo la morte di PLATONE e circa un ventennio dopo quella di ARISTOTELE, offre senza dubbio elementi importanti. A questo proposito va osservato in linea generale che l'esame degli *Elementi* di EUCLIDE rivela sempre nuovi aspetti e nuove insospettate zone d'interesse. I commenti che sono apparsi negli ultimi decenni (HEATH, ENRIQUES, DIJKSTERUIS e altri) e le varie trattazioni generali e particolari hanno recato senza dubbio un contributo decisivo allo studio della grande opera. Ma sembra di poter dire che non abbiano ancora esaurito il campo di ricerca, e che lascino ancora nuove possibilità di interpretazione, di ricostruzione del pensiero direttivo dell'immortale Autore.

È questo un fenomeno caratteristico presentato soltanto da alcune grandi opere del pensiero umano, che hanno sfidato i secoli.

Ugualmente potrebbe dirsi per l'opera di ARCHIMEDE, il cui profilo, tracciato con inconfondibile profondità di pensiero da FRANCESCO SEVERI, è già auguralmente apparso nel primo numero di questa rivista.

ATTILIO FRAJESE.

---

[1] Cfr. M. DEHN, *Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles vom mathematischen Standpunkt aus*, I e II, « Scientia », 60, 12-21 e 69-71 (1936); ID., *Beziehungen zwischen der Philosophie und der Grundlegung der Mathematik im Altertum*, « Quellen u. Stud. z. Gesch. Math. », B. 4, 1-28 (1937); K. REIDEMEISTER, *Das System des Aristoteles*, « Hamburger Math. Einzelschriften », 37 (1943).