ISTITUTO STORICO ITALIANO
PER IL MEDIOEVO

Concorso
La Matematica nel Medioevo
Premio Bruno Rizzi
III edizione (2010 – 2011)

S'INMILLA: PROBLEMA "POSTO" DA DANTE

Alunne: Mariarosaria Acquafredda**;** Maria Amorese**;** Chiara Arbore; Marika Cassano; Marcella De Leo; Mariagiovanna De Palma; Valentina de Palma; Mariateresa De Sario; Maria Giannoccaro; Adriana Leuci; Maria Lisi; Alessandra Mastrorilli; Valeria Paparella; Maria Parisi; Antonella Pellegrini; Maria Petrone; Rosanna Riccardi; Clementina Tota. (Studentesse della IV C del Liceo statale "Tommaso Fiore" di Terlizzi)

Referente: Prof.ssa Mariangela BAVARO

Riassunto

La Matematica e la Letteratura sembrano procedere su cammini distanti nella scuola italiana anche se per lungo tempo hanno navigato insieme. Il percorso didattico di storia del calcolo numerico intrapreso da un gruppo di alunne della classe IV sez. C Socio-Psico-Pedagogico del Liceo "T. Fiore" di Terlizzi è iniziato con la lettura dei versi 91-93 del canto XXVIII del Paradiso, in cui Dante ci sorprende per il modo con cui delinea l'immagine degli angeli che girano intorno a Dio, aiutandosi con la Matematica:

"L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che'l numero loro
piu che'l doppiar de li scacchi s'inmilla".

"Il doppiar de li scacchi": la leggenda di Sissa Nassir

Nel papiro di Ahmed si racconta che il re di Persia, il più potente e ricco sovrano del tempo, annoiato per il dolce far niente da mane a sera, bandì un concorso per il miglior inventore di un passatempo divertente per il sultano.

Tanti maghi risposero all'appello e il vincitore fu un certo Sissa Nassir, che aveva proposto, dopo adeguata spiegazione, il gioco degli scacchi. Il sultano rimase molto affascinato dall'invenzione e chiese quale potesse essere la ricompensa. Il mago rispose: "Semplicemente un po' di riso ottenuto doppiando gli scacchi, cioè: un granello per la prima casella, due per la seconda, il doppio per la terza quindi quattro, il doppio, ancora, per la quarta cioè otto e così via, fino all'ultima casella della scacchiera"

Il sultano, dopo aver consultato il matematico di corte, capì che il numero richiesto era eccessivo e alla fine fece decapitare Sissa per alto tradimento reale.

A scuola d'abaco

Quanto grande fosse il numero dei chicchi della leggenda di Sissa era uno dei tanti quesiti, a volte rompicapi, proposti nelle scuole di Matematica nel Medioevo.

Le scuole di Matematica si chiamavano scuole d'abaco e, le più importanti si trovavano a Verona, Firenze e Venezia

Essendo la matematica una delle quattro arti del quadrivio ed essendo Firenze città di banchieri e mercanti, una scuola d'abaco, ossia di aritmetica in Santa Trinità, fu la celeberrima bottegha d' abacho di Paolo Dagomari soprannominato dell'Abbaco da cui passarono, nel corso della sua carriera, circa diecimila studenti . Così si diceva di lui: "Il Dagomari a moltissimi, anzi a infiniti nella nostra Firenze fu in aritmetica diligentissimo maestro, rinovellatore di buone e utilissime regole, e principiò a scorgere la nostra città alle utili e leggiadre regole dell' algoritmo inaudito e morto per moltissimi anni" .

Jacopo, figlio di Dante, fu allievo di Paolo dell'Abaco, il quale, oltre che un matematico, fu astronomo e poeta. Tanta celebrità gli valse il priorato del quartiere di S. Spirito nel maggio e nel giugno del 1363.

I libri, utilizzati in queste scuole si chiamavano Liber Abbaci. Furono testi redatti quasi esclusivamente in volgare toscano (ma anche nelle lingue volgari delle varie regioni) ad imitazione del Liber Abbaci di Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1170-1240). Questi testi venivano scritti prevalentemente da maestri d'abaco, cioè maestri artigiani, che avevano spesso delle scuole di matematica pratica per gli apprendisti mercanti, dove si studiavano le tecniche per eseguire le operazioni aritmetiche, le regole pratiche per il calcolo di aree e volumi e le proporzioni legate alla risoluzione di problemi commerciali e finanziari. Attualmente restano circa 300 manoscritti contenenti trattati d'abaco, conservati prevalentemente in biblioteche fiorentine. I trattati d'abaco erano in genere diversi l'uno dall'altro per forma, per dimensioni e contenuto, ma per la maggior parte trattavano i due sistemi di numerazione indo-araba e romana. La parte più vivace, però, riguardava quesiti di matematica ricreativa.

In quel periodo c'erano due scuole di matematici: algoristi e abacisti, i primi sostenevano il nuovo metodo, quello degli "infedeli", con il sistema posizionale decimale e con lo zero, chiamato zephirum dagli arabi, per scrivere i numeri ed eseguire più facilmente le operazioni; le seconde, di orientamento tradizionale, si battevano per l'utilizzo dell'abaco con la numerazione romana.

Sia i matematici attivi nelle scuole ecclesiastiche o nelle università che quelli impegnati nel commercio e negli scambi commerciali contribuirono alla diffusione delle cifre indo-arabe e tra gli autori più famosi ricordiamo: il francescano francese Alessandro di Villedieu (attivo verso il 1225), il Sacrobosco, Giovanni di

Halifax (nel periodo tra il 1200 e il 1256), nell'università inglese e il celebre Fibonacci, figlio di un importante mercante Bonaccio che aveva affari in molte località dell'Africa settentrionale.

Era consuetudine che si organizzassero gare di calcolo e di risoluzione di problemi, che, molto spesso, furono vinte dagli algoristi, dimostrando così quanto fosse più facile trovare i risultati esatti dei quesiti con il nuovo metodo.

La Chiesa fu contraria all'introduzione delle "fighure delli Indi" perché erano di invenzione degli infedeli. Un articolo dello Statuto dell'Arte del Cambio di Firenze nel 1280 vietò l'uso dei numeri Arabi da parte dei banchieri perché si riteneva che lo "0" apportasse confusione e venisse impiegato anche per mandare messaggi segreti. Pare, infatti, che il termine messaggio cifrato provenga da questo sistema di numerazione chiamato "cifra"

La diatriba tra i due metodi durò dal XII al XV secolo, con la definitiva affermazione del metodo indo-arabo.

Molti problemi studiati durante le lezioni di matematica ricreativa sono giunti a noi e s'impongono alla nostra attenzione per gli interessanti metodi risolutivi utilizzati dai matematici dell'epoca, che mostrano di possedere una bella genialità.

Il genio Fibonacci

Il risultato del "doppiar degli scacchi" si potrebbe ottenere partendo da 1 e raddoppiando ogni volta: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, e così via, fino al sessantaquattresimo numero della sequenza (le caselle della scacchiera sono 64). Fibonacci però è più furbo, e trova un procedimento più veloce. Comincia a calcolare i primi otto numeri, quelli cioè che formano la prima riga della scacchiera;

1	2	4	8	16	32	64	128

la loro somma 1+2+4+8+16+32+64+128=255 che è di uno minore del numero successivo 256.

Se ora si moltiplica 256 per sé stesso, si ottiene 65.536, che supera di uno la somma dei numeri delle prime due righe. Moltiplicando questo numero per sé stesso, si trova 4.294.967.296, che è di uno superiore alla somma dei numeri delle prime quattro righe. Infine, moltiplicando ancora una volta l'ultimo numero trovato per sé

stesso, si trova 18 446 744 073 709 551 616, che supera di uno la somma di tutti i numeri della scacchiera, ossia di tutti i chicchi di grano.
Un numero così lungo non dice niente, ed è difficile farsi un'idea della sua enormità; in fondo a vederlo scritto non sembra poi tanto spaventosamente grande. Per far sì che il lettore possa farsi un'idea, Leonardo introduce una serie di grandezze crescenti. Supponiamo dice che i numeri rappresentino altrettanti bisanti (il bisante è una moneta d'oro imperiale); le prime due righe della scacchiera assommeranno a 65.535 bisanti, che riempiono una cassa. Alla terza riga si ricomincia con 2, 4, 8, casse, finché alla fine della quarta riga si saranno riempite 65 535 casse, che faranno una casa. La quinta e la sesta riga daranno allora 65 535 case, una città; e infine le ultime due righe moltiplicheranno il numero delle città fino a 65 535. In totale, se si parte con un bisante, tutta la scacchiera ammonterà a 65 535 città, ognuna delle quali sarà composta di 65 535 case, che conterranno ciascuna 65 535 casse con 65 535 bisanti ognuna.
Al calcolo dei chicchi della storia dell'inventore degli scacchi, si ispirò Fibonacci quando propose il problema delle sette vecchie:
Sette vecchie donne andarono a Roma; ciascuna donna aveva sette muli; ciascun mulo portava sette sacchi, ciascun sacco conteneva sette forme di pane; e con ciascuna forma di pane v'erano sette coltelli; ciascun coltello era infilato in sette guaine.
Fibonacci fin da piccolo era sembrato molto intelligente, tanto che il padre, allo scopo di farlo diventare un bravo mercante, lo portò ancora giovanissimo in Africa per dargli la possibilità di studiare presso scuole arabe, in cui c'erano maestri capaci di istruire molto bene alle tecniche di calcolo che non erano ancora state introdotte in Occidente.
Nel tempo la reputazione di Leonardo come bravo matematico arrivò alla corte di Federico II. Qui egli partecipò a gare di matematica vincendole e risolvendo con genialità sorprendente diversi quesiti. Tra questi, celeberrimo è il problema dei

conigli la cui soluzione ha portato alla famosissima “serie di Fibonacci”, dove ogni termine è ottenuto dalla somma dei due precedenti.

Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un’unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese ?

S’inmilla

I quesiti di matematica ricreativa continuarono a circolare tra le persone colte di Firenze per tutto il medioevo e anche Dante che era molto curioso e desideroso di apprendere deve averli conosciuti e apprezzati.

A chi si sarà rivolto per avere notizie in merito? Sarà venuto a conoscenza del Liber Abaci del genio Fibonacci? Una considerazione viene spontanea: “Come mai il sommo poeta non lo cita mai nella Divina Commedia?”

Dante ha saputo cogliere ed interpretare originalmente il potere immaginifico e metaforico della matematica. I canti XXVIII e XXIX del Paradiso sono dedicati alla dottrina degli angeli; le categorie angeliche che presiedono ai nove cieli del Paradiso sono disposte secondo nove cerchi concentrici in movimento e da ognuno di essi un numero enorme di scintille si stacca dal proprio cerchio di competenza in modo che gli angeli si distinguono uno a uno stando sempre in movimento.

Dante, poeta che sa usare bene le parole, vuole rendere l’immagine di un numero grandissimo, ma non può usare il termine “infinito” che poteva costituire un serio problema di carattere teologico e risultare banale e poco incisivo. Il “S’inmilla” è un termine nuovo per il lettore la cui fantasia è stimolata dal poter immaginare di contare, ma mentalmente non può arrivarci e pensa al limite umano.

In questa metafora Dante sostituisce la potenza del due del “doppiar degli scacchi” con la potenza in base mille.

Oggi con strumenti matematici come la notazione esponenziale, un foglio di calcolo elettronico, il principio di induzione che dimostra che la somma dei primi enne termini di una progressione geometrica

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dove a_1 è il primo termine della successione e q è la ragione della progressione, siamo in grado di quantificare il "s'inmilla",

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{1000^n - 1}{1000 - 1}$$

che è un numero certamente grande 10^{189}, che ha 190 cifre.

Per rendersi conto della enormità di questo numero, si può ricorrere al seguente espediente: immaginare di distribuire gli angeli su tutta la superficie terrestre S, la cui misura, espressa in base ai dati attuali (e non quelli dei tempi di Dante), compresi mari, oceani, deserti, ghiacciai, montagne, ecc., è di circa S=5,0995*10^{18} cm^2 . Dividendo il numero degli angeli per S, si ottiene

1,961*10^{166}

Tale numero di 167 cifre indica quanti angeli ci sarebbero per cm^2 della terra.

Verrebbe da dire: "Tanto il matematico quanto il poeta utilizzano un linguaggio di grande potenza!"

Ringraziamenti

Il lavoro presentato è frutto di discussione in classe durante le attività curriculari e di ricerche effettuate in Internet dalle alunne in attività pomeridiane a casa. Lavorando, poi, in gruppo le alunne hanno scritto relazioni attingendo dal materiale reperito, per arrivare a redigere, in fase di intergruppo, il lavoro finale.

Si ringraziano l'Istituto Storico Italiano per il Medioevo e la Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche Mathesis per aver dato questo stimolo di ricerca didattica

interdisciplinare, che ha visto lavorare con entusiasmo le alunne e le docenti di Matematica e di Lingua e Letteratura Italiana.

Sitografia

http://www.youreporter.it/video_Dante_tra_matematica_e_letteratura_1

http://economia.biblio.uniroma2.it/smartFiles_Data/e90d345d-fa81-4627-b97c-c25368e047f2_Dante%20e%20la%20Matematica.pdf

http://istruzione.umbria.it/news2008/dante/lc_pontano_la_matematica.pdf

http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/fibonacci/catalogo/giusti.php

http://books.google.it/books?id=ipMlpHt0zkUC&printsec=frontcover&dq=giochi+fibonacci&hl=it&ei=ng75TMrTMYqbOtrCjNUK&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CC8Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false

http://books.google.it/books?id=kxoHFof--FUC&pg=PA98&dq=dante+matematica&hl=it&ei=9A75TMqDOsSEOteu9NQK&sa=X&oi=book_result&ct=book-preview-link&resnum=2&ved=0CC8QuwUwAQ#v=onepage&q=dante%20matematica&f=false

http://it.wikipedia.org/wiki/Abacisti

http://www.delfo.forli-cesena.it/smcassole/downdoc/concorsocarlino.doc

http://www.matebi.it/2004/10/22/matematica-e-dante/

Bibliografia

Dirk J. Struik Matematica: un profilo storico Universale Paperbacks il Mulino

Carl B. Boyer Storia della Matematica Oscar Saggi Mondadori