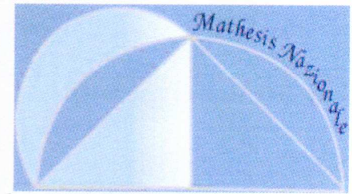




ISTITUTO STORICO ITALIANO  
PER IL MEDIOEVO

## Concorso La Matematica nel Medioevo Premio Bruno Rizzi III edizione (2010 – 2011)



### LA BOTTEGA DEI NUMERI

**Alunni:** Cesare Balini; Silvia Bentoglio; Daniel Bernini; Giacomo Brugnoli; Matteo Caliendo; Fabiano Carminati; Raffaele Cavaliere; Michael Cuter; Giada Daminelli; Michel Devin; Michele Elitropi; Elena Eustacchio; Andrea Gambarini; Giacomo Ghilardi; Davide Lego; Marta Luiselli; Daniele Mismetti; Samuele Morettini; Gabriele Nava; Nicolo' Negri; Andrea Roncalli (Studenti della 3<sup>A</sup>B dell'Istituto Tecnico Agrario di Bergamo)

**Referenti:** Prof.sse Carmelita Fratus; MariaLuisa Lanzini



Sono vent'anni che gestisco questa locanda lasciata in eredità da mio padre e mi rallegro del fatto che essa rappresenti un punto di incontro per persone di ogni

sorta, qui a Venezia: i miei clienti infatti sono sia semplici pescatori che ricchi mercanti e spesso ad essi si aggiungono anche alcuni studenti e maestri della vicina università di Padova che discutono di problemi e soluzioni di ogni genere. La mia taverna è ubicata sulla Laguna, vicino al porto dei pescatori. Internamente, sui muri, sono appesi attrezzi per la pesca (reti, ami) ma anche armi di ogni tipo (alabarde, spade, scudi, elmi) lasciatemi da vari avventori squattrinati in cambio di un buon bicchiere. Di sera l'illuminazione è garantita da torce appese alle pareti. Sui tavoli di legno massiccio si gioca a carte, ai dadi e si discute. Al piano di sopra, ci sono le camere per i viandanti con letti comodi e pagliericci soffici. Le pietanze che preparo e faccio servire dai miei servi sono spesso a base di pesce fresco che acquisto dai pescatori del porto adiacente all'osteria; ma cucino anche carne, selvaggina, frutta di ogni tipo, della nostra zona o proveniente dall'Oriente. D'inverno ogni giorno accendiamo grandi camini che scaldano molto e che mi servono per sfornare gustose pagnotte. Ma per scaldare gli animi, nei periodi freddi, servo vino caldo e speziato. Ed è forse per la mia ospitalità o per la mia bonomia, che nella taverna spesso assisto a interessanti dispute, come quella che mi è capitata tempo fa.

Un fresco giorno primaverile, i soliti avventori occupavano la mia taverna, ma ad un tratto vedo entrare un uomo che vestiva abiti orientali di seta molto raffinata dai colori insoliti e ornato con pietre preziose assai rare.

Si avvicina al mio banco e mi dice: "Oste, puoi servirmi un calice del tuo miglior vino?". Io gli rispondo: "Accomodatevi messere sarete immediatamente servito".

L'uomo si avvicina prima al bancone occupato da un gruppo di mercanti che stavano discutendo dell'esito della battaglia sull'isola di Curzola contro Genova. Un gruppo di studenti e maestri discuteva invece, ad un altro tavolo, sulle teorie di Pitagora ed Euclide, utilizzando grosse pergamene sulle quali appuntare molti segni e ragionamenti. Questi appassionati studiosi erano soliti riunirsi nel mio locale per confrontarsi su temi assai difficili, come la matematica e la geometria, cercando di

coinvolgere nei loro ragionamenti anche le persone più semplici, le quali invece, di solito, preferivano bere e giocare a dadi.

L'uomo misterioso si avvicina proprio a questo tavolo ed esordisce dicendo: "Signori, sareste in grado di risolvere un quesito che ho da proporvi?"

Incuriosito uno studente gli chiede però di presentarsi e l'uomo, scusandosi, dice di chiamarsi Marco Polo e di essere appena tornato da un lungo viaggio in Oriente che lo aveva spinto fino al Catai dove era stato accolto dall'imperatore Qubilai Khan, nipote di Gengis Khan un re molto dotto e incuriosito dalle persone provenienti dall'Occidente. Durante il viaggio di ritorno aveva trovato sulla nave un vecchio manoscritto su cui era vergato il seguente quesito:

"Un signore à un suo fante e mandalo nel giardino per sette mele e dice: tu troverai tre portinai che cischuno ti dirà io voglio la metà di tutte e due più di quelle che ti rimangono dopo la divisione. Adomando quante che ne cholxe di prima volendo che ne gli rimanexxe sette" .

Poiché la soluzione non era facile, voleva sottoporla ai presenti perché la risolvessero, dimostrando così che i dotti maestri della Serenissima erano i migliori.

Tutti i presenti allibiti si osservano, e Marco Polo, con enfasi, esclama:

" Avete due giorni per risolvere il quesito"

Così tutti i gli avventori più colti, attoniti ma stimolati dal problema, si sono ritirati nelle proprie dimore, tentando di trarre da quel problema lo spunto che avrebbe reso l'uno o l'altro vincente.

Paolo dell'Abbaco, giovane assiduo frequentatore della mia taverna che di matematica ne capisce davvero, si era diretto subito alla bottega del padre per aiutarlo, pensando magari di trarre spunto dall'attività pratica per risolvere il problema.

Ma il lavoro era molto in arretrato e la sistemazione delle pezze di stoffa assai faticoso, tanto che la sera, senza nemmeno buttar giù un tozzo di pane, si era

addormentato di schianto.... ma nella testa aveva sempre quel benedetto quesito che non lo abbandonava, finché un profondo sonno lo colse .

Sognò di essere a Pisa, dove viveva la dama che sempre aveva desiderato e incurante delle difficoltà che ciò avrebbe comportato, decise di prendere coraggio e di dichiararle il suo amore. Così la cercò e trovatala le si avvicinò guardandola intensamente negli occhi chiari che lasciavano trasparire, il suo stesso sentimento. La dama gli rivelò che era disposta ad amarlo ma soltanto ad una condizione: Paolo aveva fama di essere abilissimo nel calcolo ed ella voleva metterlo alla prova. Così gli disse:

“Son disposta ad amarti se soltanto mi saprai donare sette delle famose rose di Pisa; esse dovranno essere le rimanenti di un grosso mazzo che tu stesso mi dovrai cogliere, ma prima di donarle a me dovrai regalare la metà dello stesso mazzo più due delle restanti rose alle mie tre sorelle”

Paolo si mise subito all’opera motivato più che mai dal pensiero che in tal modo sarebbe stato degno di lei. Dopo lunghe congetture e calcoli su calcoli capì che la soluzione al quesito era più semplice di quanto avrebbe potuto immaginare, addirittura banale.

Se ad ogni sorella infatti doveva regalare metà del mazzo più due rose, molto semplicemente, alla seconda delle tre ragazze sarebbero spettate due rose in più rispetto al mazzo che sarebbe stato destinato alla sua dama moltiplicato per due (e cioè  $7+2 = 9$ ;  $9 \times 2 = 18$ ). Alla prima delle tre sorelle sarebbero spettate nuovamente due rose in più della terza ragazza a sua volta ancora moltiplicato per due (e cioè  $18 + 2 = 20$ ;  $20 \times 2 = 40$ ) ed infine secondo lo stesso procedimento avrebbe potuto calcolare quante rose doveva acquistare e cioè  $40 + 2 = 42$  ,  $42 \times 2 = 84$  rose!

Così il giovane girovagò per Pisa andando alla ricerca delle rose che sembravano non essere mai abbastanza; ma alla fine riuscì a coglierne il numero desiderato. Poco dopo incontrò la prima ragazza e le lasciò la metà del mazzo più due rose e cioè in totale 44 rose. Proseguì e dopo non molto incontrò la seconda sorella e dal mazzo di

40 rose rimaste ne estrasse la metà ovvero 20, ne aggiunse altre due per un totale di 22 e proseguì. Gli rimasero infine 18 rose che divise nuovamente in due e alle quali ne aggiunse due, donando così alla terza ed ultima sorella 11 rose.

Contò le restanti rose, ed essendo proprio 7, subito corse dalla dama che ormai aveva perso ogni speranza di ottenere il suo pegno d'amore: ma giunto ai piedi della sua dimora mentre la stava chiamando, chiedendole di affacciarsi qualcuno all'improvviso lo scuote .....

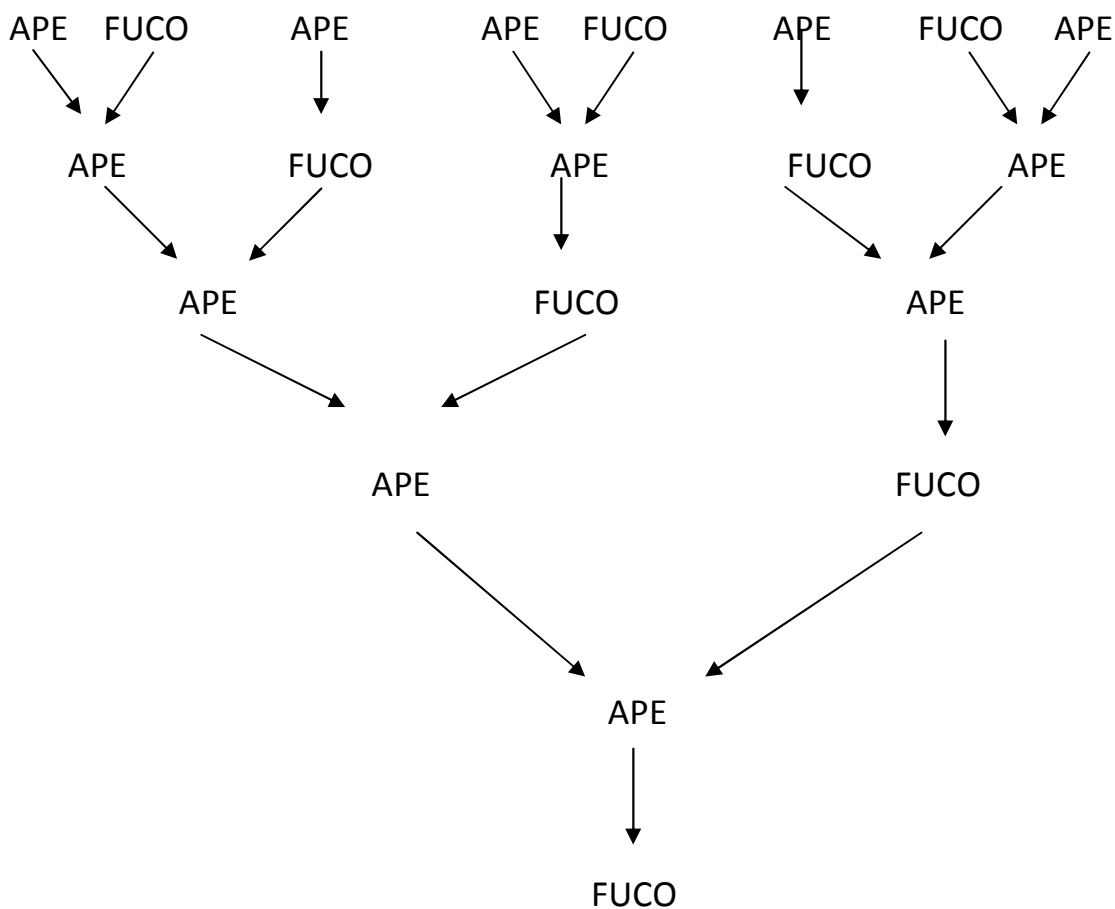
Con grande delusione Paolo adesso è sveglio e si accorge che tutta quella fatica, tutti quei calcoli erano semplicemente svaniti e con essi il sogno di potersi incontrare con la sua amata ... ma qualcosa era rimasto: nel sogno aveva trovato la soluzione al problema di Marco Polo!!!!.

Il giorno seguente Paolo è ritornato trionfante alla mia taverna e ha illustrato a Marco Polo la soluzione al quesito. A questo punto, rose o mele poco importa, ma la scommessa era vinta.

Nei giorni a seguire Marco Polo è tornato spesso alla mia locanda e ha raccontato tante altre meraviglie che ha visto o delle quali comunque ha sentito parlare in Catai (tanto che a mio parere ci dovrebbe scrivere sopra un libro): una montagna tanto alta che sembrava arrivare in Paradiso, animali esotici mai visti in Europa e una scoperta che lo ha appassionato molto e che ha incuriosito anche gli avventori della mia taverna.

Gli abitanti del Catai, hanno scoperto che i fuchi, cioè i maschi delle api, sono originati solo da un'ape femmina, mentre le api femmina sono originate da un fuco e da una femmina. Il mercante estrae dalla sacca un'altra pergamena che mostra gli appunti presi da lui stesso dopo aver osservato diverse generazioni di api che aveva visto nascere e crescere nel palazzo dell'imperatore .

Ecco che agli occhi meravigliati degli avventori e anche miei, Marco illustra le sue pazienti annotazioni che aveva riassunto così:



Più di qualche ospite si stupisce ed un giovane matematico esclama: “L’albero genealogico di queste api somiglia molto alla dimostrazione che Leonardo Fibonacci ha fatto con i conigli vincendo una prova di abilità proposta dal grande Federico II”. Studenti e maestri, che conoscono la successione numerica di Fibonacci provano ad applicarla all’albero genealogico dei fuchi e riscontrano un’analogia.

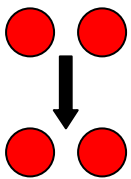
Questa volta è Marco Polo a non intendere, mentre i dotti studenti e maestri stanno capendo tutto.

Uno di questi, Giangiacomo di Castelfranco, spiega al mercante che nella sequenza numerica di Fibonacci ogni numero preso in questione è dato dalla somma dei due precedenti. A questo proposito racconta al mercante una disavventura capitatagli un giorno di trent’anni or sono.

Un astuto ladro si era intrufolato nel suo podere e aveva rubato i suoi conigli che allora erano ben più di duecento. A quel punto, si era rivolto all’amico Leonardo,

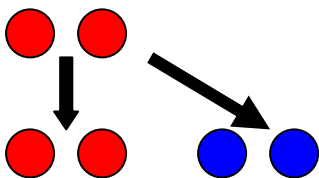
figlio del noto mercante Guglielmo dei Bonacci, nella speranza di scoprire come e in quanto tempo ricreare il suo allevamento partendo da una coppia di conigli.

Leonardo ipotizzò che uno schema avrebbe potuto essere loro d'aiuto e allora, dopo aver preso carta e penna, si era messo a disegnare mentre spiegava all'amico i suoi ragionamenti: "Se acquisto una coppia di conigli, alla fine del mese avrò solo questi due animali, perché solo adesso essi diventano fertili. Li indico con due pallini rossi:



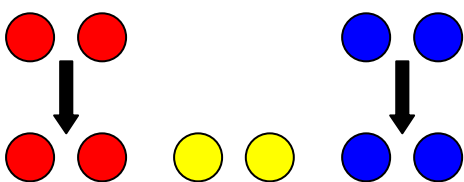
mese 0: 1 coppia      1° mese: 1 coppia

Ora questa coppia può quindi riprodursi e mettere al mondo un'altra coppia, che per il primo mese non potrà avere figli. Quindi alla fine del secondo mese avremo due coppie, quella iniziale, indicata sempre con due pallini rossi, e quella appena nata, rappresentata da due pallini blu:



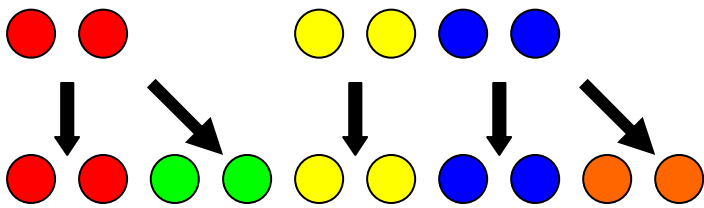
2° mese: 2 coppie

Proseguendo ancora avremo la coppia iniziale rossa che si riproduce, mentre la seconda copia blu che cresce. Ci saranno quindi ancora la prima e la seconda coppia, più una terza, che indico con due pallini gialli:



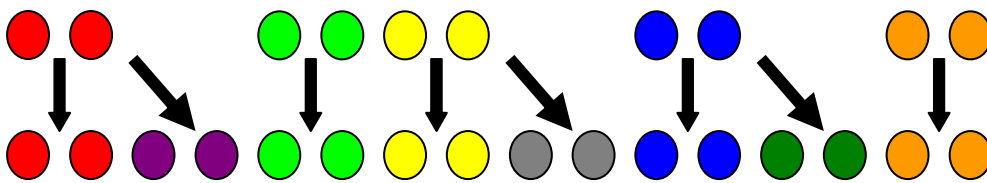
Il mese successivo la prima e la seconda coppia si riprodurranno, mentre la terza crescerà solamente. Avremo quindi cinque coppie: la prima rossa, la seconda blu, la

terza gialla, la quarta, figlia della prima, verde, e la quinta, figlia della seconda, arancione:



3° mese: 3 coppie; 4° mese: 5 coppie

Continuando otterremo otto coppie, perché si riproducono la prima, la seconda e la terza coppia, mentre le altre crescono solamente, come puoi vedere dallo schema:



5° mese: 8 coppie

“Sì, ho capito come funziona ma, continuando così impiegheremo tantissimo tempo per arrivare al dodicesimo mese!” Lo aveva interrotto Giangiaco, che, nonostante avesse davvero compreso il meccanismo, iniziava a perdersi con tutti quei colori, “Non si potrebbero utilizzare numeri e calcoli? Sarebbe tutto più facile!”.

“Potremmo provarci e per sveltire ancor di più il procedimento potremmo usare quei segni inventati dagli infedeli che ho imparato nei miei viaggi da mercante”, gli aveva risposto Leonardo. Detto questo riportò su un altro pezzo di carta il numero di coppie di conigli che avevano ottenuto mese per mese e si ritrovò con il seguente elenco: 0 1 1 2 3 5 8

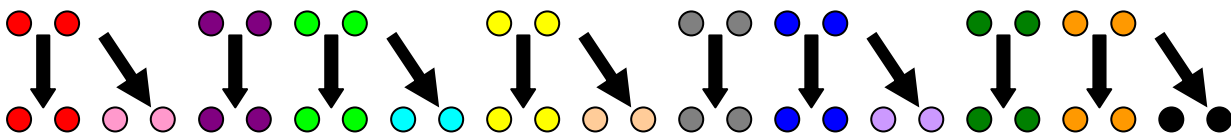
“E se si trattasse di una sequenza con un senso logico? Sembrerebbe quasi che questi numeri siano legati da qualcosa !” aveva esclamato il giovane Leonardo mostrando il foglio all’amico, il quale dopo averlo osservato a lungo gli aveva risposto: “Secondo me tu stai diventando pazzo! Questi numeri non hanno assolutamente nulla in comune!”.



“Io sono convinto del contrario e te lo dimostrerò! Prendiamo i primi due numeri, 0 e 1 sommati danno 1 che è il terzo numero della sequenza. Se ora prendo il secondo e il terzo, cioè i due 1, sommati danno 2. La relazione che intercorre fra di loro è che la somma dei primi due dà come risultato 1, cioè il terzo numero! Perciò:  $0+1=1$ ! Se prendiamo ora l'1 e l'1, che lo precede, e li sommiamo, otterremo il 2, che è il quarto numero che abbiamo trovato, quindi  $1+1=2$ . Se osservi con attenzione ti renderai conto che questo tipo di ragionamento puoi farlo con tutti i numeri trovati:  $2+1=3$ ,  $3+2=5$  e  $5+3=8$ ”

“Se il tuo modo di pensare è esatto, mio caro Leonardo, allora il prossimo numero dovrebbe essere pari alla somma di otto e cinque, quindi uguale a 13!” aveva risposto Giangiaco.

“Esatto amico mio e ora controlliamo se ciò è vero, utilizzando il nostro buon vecchio schema: avevamo otto coppie, delle quali cinque in grado di riprodursi e tre appena nate e quindi ancora sterili.



6° mese : 13 coppie”

Come puoi vedere da otto coppie ne abbiamo ottenute tredici e perciò ciò che dicevo era esatto”.

“Leonardo sei un genio” gli aveva infine detto Giangiaco, davvero stupito della perspicacia dell'amico “Ora sarà tutto molto più facile! Da qui possiamo proseguire con i numeri. Se al sesto mese abbiamo 13 coppie e al quinto 8, al settimo ne avremo  $8+13=21$  e di conseguenza:  $13+21=34$ , all'ottavo mese,  $21+34=55$ , al nono mese,  $34+55=89$ , al decimo mese,  $55+89=144$ , all'undicesimo mese ed infine  $89+144=223$ , alla fine del dodicesimo mese e quindi dell'anno.”

E grazie al calcolo dell'amico Leonardo, Giangiaco era riuscito a determinare in quanto tempo avrebbe potuto riavere il suo allevamento al completo !

Il ragionamento aveva colpito anche Marco Polo che aveva così chiarito anche le sue perplessità sullo schema che aveva presentato ai dotti frequentatori della mia taverna.

Da quel dì sono passati molti anni e ogni giorno sullo stesso tavolo trovo seduti Marco Polo e gli altri “matematici” a questionare delle ultime scoperte ed ora, a forza di sentirli discutere, a grandi linee, riesco anch’io a comprendere qualcosa.

Marco continua a raccontarci dei suoi meravigliosi viaggi in Catai e a suggerire sempre curiosi indovinelli che richiamano nuovi avventori e che fanno nascere di continuo le più argute dispute tanto che ..... la mia locanda è diventata ormai per tutti “La bottega dei numeri”!