a.s. 2008/09

La disgregazione delle certezze

Liceo cl. G. De Sanctis
Classe IIIC

Prof.ssa Lucia Fellicò

Relatrice:

Serena Ridolfi

La prima certezza:

LA GEOMETRIA EUCLIDEA

Per migliaia di anni, nonostante fosse chiaro a tutti che lo spazio matematico astratto è distinto da quello delle percezioni sensoriali e quindi dallo spazio fisico, i matematici sono stati convinti che la geometria euclidea fosse l'idealizzazione corretta dello spazio reale e delle sue figure.

La stessa aspirazione a costruire l'aritmetica, l'algebra e l'analisi come sistemi formali simili alla geometria era dettata proprio dall'esigenza di garantire così la "verità" di queste discipline.

Le geometrie non euclidee hanno stravolto questa visione: rinunciando a descrivere il mondo reale, la geometria, ed in generale la matematica, verso la fine del XIX secolo era una raccolta di strutture, ciascuna costruita col proprio sistema di assiomi, con l’unica condizione della coerenza di questi. Ed era proprio questa coerenza interna a garantire la verità della teoria.

Ma Gödel ci ha privato anche di questa ultima certezza.

GLI ELEMENTI DI EUCLIDE

GLI ELEMENTI DI EUCLIDE

Costituito da tredici libri può considerarsi tra i più antichi trattati di matematica a noi pervenuti.
Non è un'opera di produzione originale ma l'esposizione in forma di trattato organico di ciò che il genio greco aveva creato nel campo matematico in circa tre secoli di attività mirabile e fecondissima.

È sicuramente un "best seller" di tutti i tempi.

La sua diffusione è paragonabile a quella della Bibbia, e come questa si trova tradotta in innumerevoli lingue.

Tutti i testi scolastici di geometria non aggiungono né cambiano quasi nulla a quanto raccolto da Euclide 2300 anni fa, per questo la geometria che abbiamo finora studiato è detta **geometria euclidea**.

STRUTTURA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Nel libro I Euclide espone le definizioni e i concetti che saranno usati in seguito. Ne riportiamo alcune per fare qualche osservazione:

Definizione 1. Punto è ciò che non ha parti

Definizione 2. Linea è lunghezza senza larghezza

Definizione 3. Estremi di una linea sono i punti.

Definizione 4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

…….

…..

Definizione 7. superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.

……..

……

Definizione 23. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano tra loro in nessuna di queste

OSSERVAZIONI

Come si vede le definizioni di apertura sono espresse in termini di concetti che non vengono definiti e quindi non assolvono nessuna funzione logica.

Infatti oggi noi rinunciamo a definirli, considerandoli **enti primitivi**, necessari in ogni teoria matematica indipendente

Ritornando all’esame della struttura del trattato vediamo che Euclide prosegue enunciando cinque postulati e cinque nozioni comuni:

Postulato 1. Risulti postulato che da qualsiasi punto si possa condurre una retta a ogni altro punto.

Postulato 2. E che si possa prolungare una linea retta finita continuamente in linea retta.

Postulato 3. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza.

Postulato 4. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

Postulato 5. e che se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due angoli retti.

NOZIONI COMUNI

Nozione comune 1. Le cose che sono uguali ad una stessa cosa sono anche uguali tra loro.

Nozione comune 2. E se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali.

Nozione comune 3. E se da cose uguali si sottraggono cose uguali, i resti sono uguali.

Nozione comune 4. E le cose che coincidono tra loro sono tra loro uguali.

Nozione comune 5. E il tutto è maggiore della parte.

OSSERVAZIONI

Secondo Euclide le nozioni comuni (in seguito chiamate da Proclo **assiomi**) sono, come già aveva asserito Aristotele, verità applicabili a tutte le scienze, mentre i postulati sono propri della geometria.

Secondo Aristotele la verità dei postulati sarebbe stata certificata dal fatto che i risultati da essi dedotti concordassero con la realtà.

In altre parole, secondo i canoni della concezione classica (aristotelica) dell'assiomatica, i principi di una teoria scientifica devono essere "evidenti".

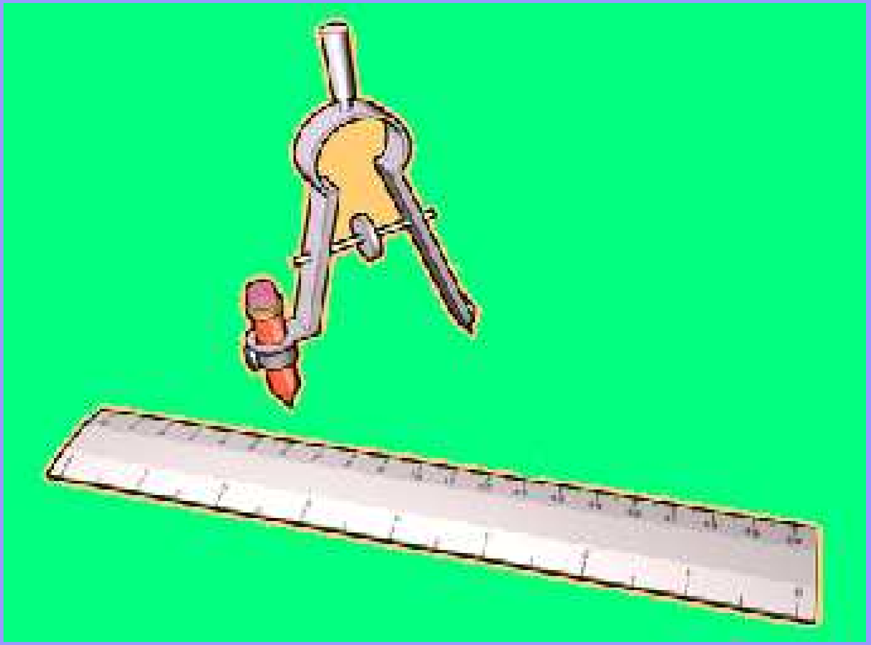
Gli altri elementi della teoria sono definiti successivamente per mezzo di quelli primitivi e tutte le altre proposizioni (**teoremi**) vengono dedotte dagli assiomi o da altri teoremi già dimostrati.

La scelta degli assiomi fatta da Euclide è degna di nota: a partire da essi egli è in grado di dimostrare centinaia di teoremi.

Altra caratteristica mirabile è il ragionamento **logico deduttivo**.

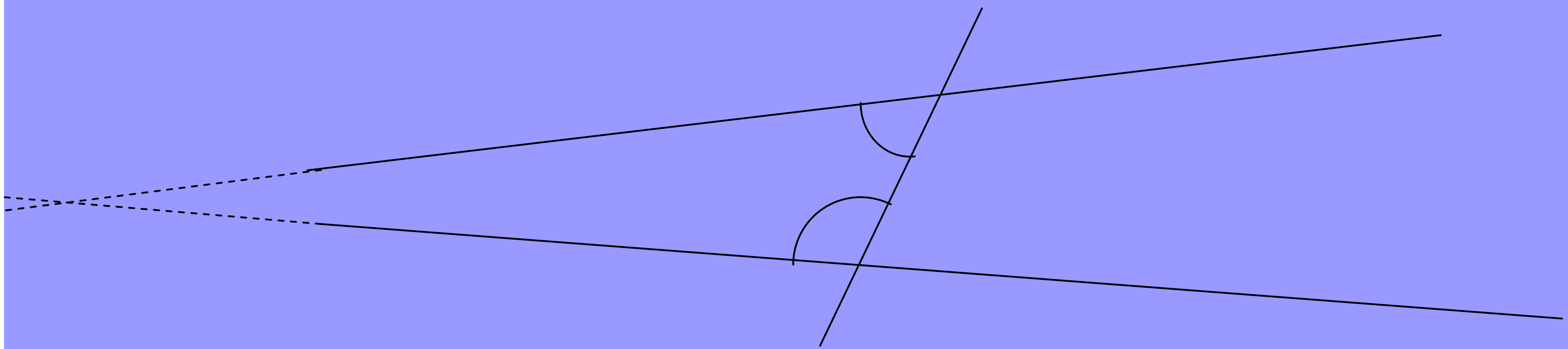
I greci volevano delle verità e si resero conto che avrebbero potuto ottenerle soltanto con i metodi incontestabili del ragionamento deduttivo.

Euclide, come tutto il mondo greco, era consapevole che per giungere alle verità bisognava partire da verità e assicurarsi che non venisse assunto alcun fatto che non fosse verificato.

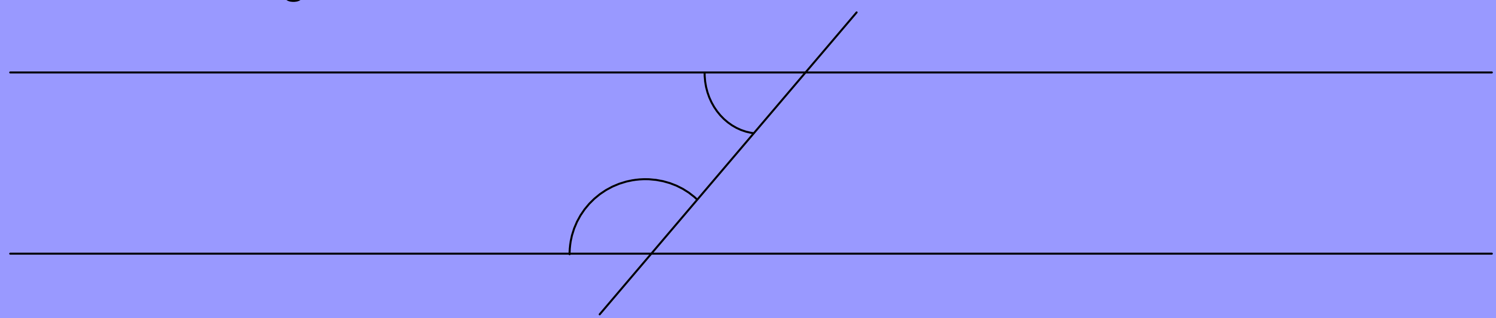


IL V POSTULATO

Se, come abbiamo detto, il trattato è un compendio delle conoscenze matematiche dell'epoca, il V postulato è originale di Euclide, e la grandezza di Euclide sta proprio nel fatto di averne riconosciuta la necessità, sebbene molti Greci abbiano criticato questo postulato perché non aveva quei caratteri di autoevidenza di cui si è detto.

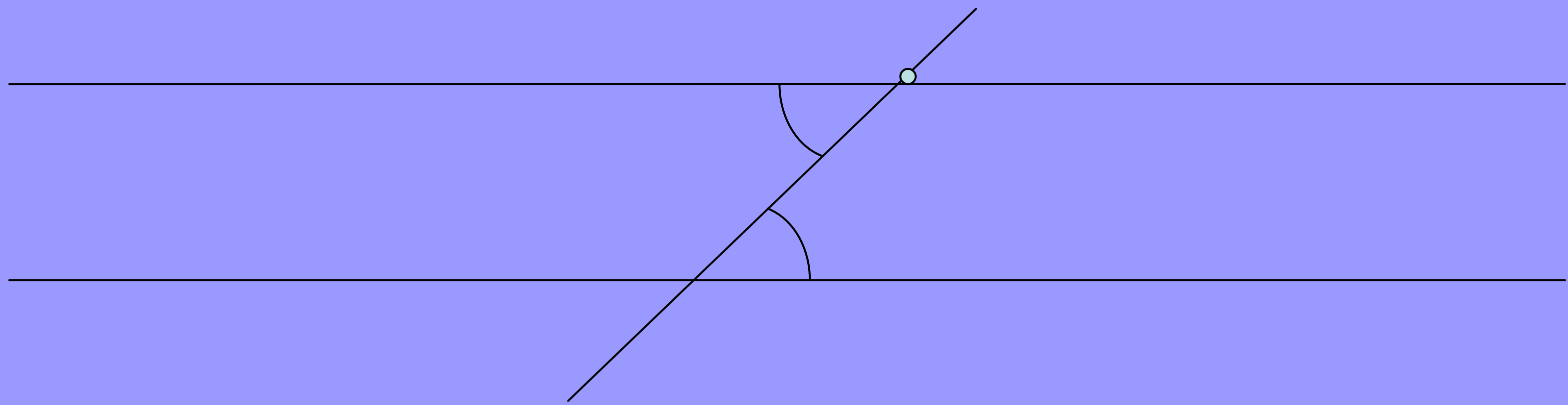


Cosa succede se da nessuna delle due parti si hanno angoli la cui somma è minore di due angoli retti?



Le due rette non si incontrano da nessuna delle due parti.

Il quinto postulato, alla luce del secondo, equivale all'affermazione che per un punto dato si può condurre **una e una sola parallela** a una retta data:



Strettamente collegato al problema del postulato delle parallele è quello di decidere se lo spazio fisico sia infinito.

Euclide si serve del postulato 2 esclusivamente per ottenere una lunghezza *finita* più grande, ed enuncia il quinto postulato in modo piuttosto complicato proprio per evitare affermazioni dirette sulle rette parallele infinite.

Fin dai tempi di Euclide furono molti i matematici che tentarono di trovare assiomi sostitutivi del quinto, o di dimostrarlo sulla base degli altri postulati e assiomi, ma inutilmente: Euclide ne aveva capito l’indispensabilità.

COME LIBERARSI DEL V POSTULATO

Come abbiamo già detto, secondo i canoni della concezione classica (aristotelica) dell'assiomatica, i principi di una teoria scientifica devono essere "evidenti".

Ebbene, una volta ritenuto che il V postulato degli Elementi di Euclide non avesse tale requisito necessario per essere assunto tra le proposizioni primitive, molti fra i commentatori di Euclide, cercarono di eliminare la difficoltà o sostituendolo o tentando di dimostrarlo.

Tuttavia i tentativi fatti approdarono a pseudodimostrazioni, in cui il postulato delle parallele era stato sostituito, in forma più o meno evidente, da un altro postulato ad esso equivalente.

Nel 1763 lo studente tedesco G.S. KLÜGEL mostrò, nella sua pubblicazione:"Conatum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demostandum Recensio" che 28 dimostrazioni del Vº postulato di Euclide, tra le più significative, erano false.

Il più importante tra i tentativi di dimostrazione era stato, senza dubbio, quello del padre gesuita Gerolamo Saccheri (1667-1733), docente di matematica presso l'università di Pavia, che, nel trattato: **Euclides ab omni naevo vindicatus** credette di aver dimostrato il postulato delle parallele mediante un ragionamento per assurdo.

IL TENTATIVO DI SACCHERI

(Il primo esempio di “geometria non euclidea”)

Saccheri era convinto di due cose:

• che l'enunciato era vero
• che esso poteva essere dedotto dai precedenti e, quindi, diventare teorema.

Egli dedicò tutta la sua vita alla ricerca di questa dimostrazione. La tecnica dimostrativa da lui adottata è questa:

•Supporre vera la negazione del postulato delle parallele.
•Dedurre dal nuovo sistema di assiomi (i primi quattro più la negazione del quinto) tutta una serie di teoremi loro conseguenza.
• Pervenire ad un assurdo (dimostrazione per assurdo)

Saccheri credette di aver realizzato anche il terzo punto del suo programma, ma in verità giudicò assurda una conclusione che era semplicemente contrastante con l'intuizione nello spazio ordinario; portò invece molto avanti il secondo punto, costruì cioè per primo, una teoria geometrica nella quale per un punto passano due parallele ad una retta: **una geometria non euclidea**.

Il crollo della prima certezza:

LA NASCITA DELLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Saccheri aveva negato il V postulato di Euclide allo scopo di dimostrarne, per assurdo, la verità.

In effetti la conclusione cui era pervenuto non costituiva una antinomia, ma semplicemente contrastava con quanto ci si aspetta intuitivamente.

Dunque egli non aveva raggiunto il suo scopo, ma senza averne l'intenzione, egli aveva costruito la prima **geometria non euclidea**, cioè una geometria basata su postulati diversi di quelli di Euclide.

Se questo era stato solo un caso, cui né Saccheri, né altri dettero all'epoca seguito, nell'800, fallito ogni tentativo di dimostrare il V postulato, si giunse definitivamente alla conclusione che esso è indimostrabile.

NUOVI SCENARI

Ma la cosa più importante è che ci si rese conto che si era di fronte a due possibilità:

• Accettare tutti i postulati di Euclide, compreso il V, e quindi accettare la geometria euclidea.

•Non accettare qualche postulato di Euclide, e quindi costruire una nuova geometria, diversa da quella euclidea.

Naturalmente rinunciando alla geometria euclidea, si rinuncia anche alla sua caratteristica di esprimere proprietà che siano *evidenti* dello spazio fisico dell'intuizione.

Si raggiunge la convinzione che è possibile costruire una geometria, del tutto coerente in sé, indipendentemente dal fatto che gli assiomi esprimano proprietà *intuitive* del mondo reale.

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Nate da ricerche di indole critica assursero gradatamente a sviluppo autonomo di notevole importanza.

La rivoluzione non euclidea è una rivoluzione di pensiero e segna la data d'inizio di buona parte del pensiero matematico moderno.

Con l'avvento delle geometrie non euclidee si scopre che è possibile esprimere matematicamente nuovi spazi, nuove geometrie senza avere alcuna pretesa di descrivere la realtà fisica.

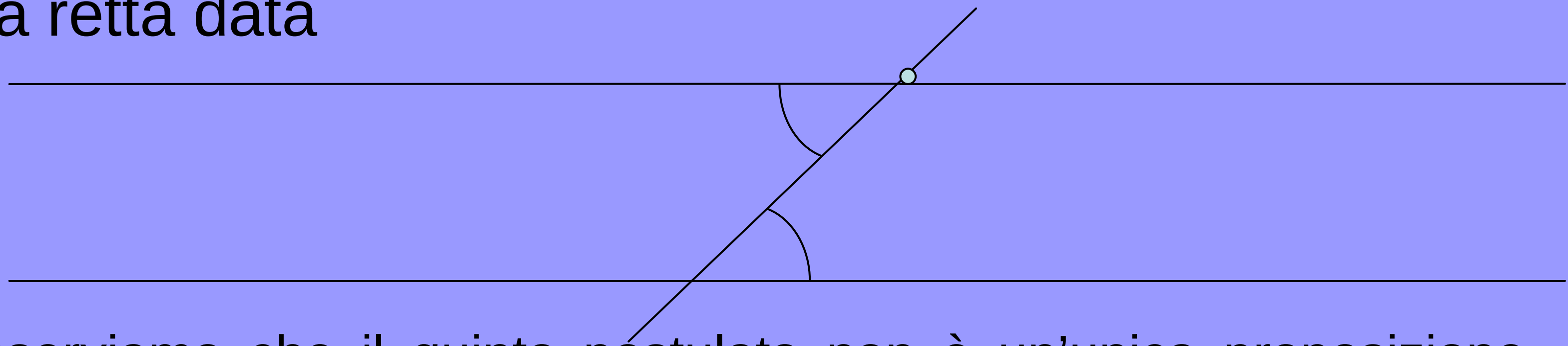
Insomma si scopre la distinzione tra "**verità**" e "**coerenza**".

Il matematico ha necessità della seconda, ma non ha bisogno di trovare la prima nel riscontro con la realtà esterna. La verità di una proposizione è data appunto dalla coerenza della dimostrazione.

Naturalmente, avendo deciso di cambiare qualche postulato, quello su cui si concentra l'attenzione è il più contestato: il quinto.

Abbiamo già fatto notare che il quinto postulato, assieme al secondo equivale ad affermare che

per un punto dato si può condurre una e una sola parallela a una retta data



Osserviamo che il quinto postulato non è un'unica proposizione, ma è costituito da due proposizioni legate dal connettivo logico “e”:

A. Per un punto dato si può condurre una parallela a una retta data

B. Tale parallela è unica.

Dunque per negare A e B potremo negare A oppure negare B

Avremo dunque più tipi di geometrie non euclidee, a seconda di quale parte del postulato attaccheremo

LE PRINCIPALI GEOMETRIE NON EUCLIDEE

I primi matematici che si resero conto che erano possibili altre geometrie furono (indipendentemente l’uno dall’altro) Bolyai e Lobačevskij, e prima di loro Gauss, che non aveva pubblicato i suoi lavori.

Janos Bolyai

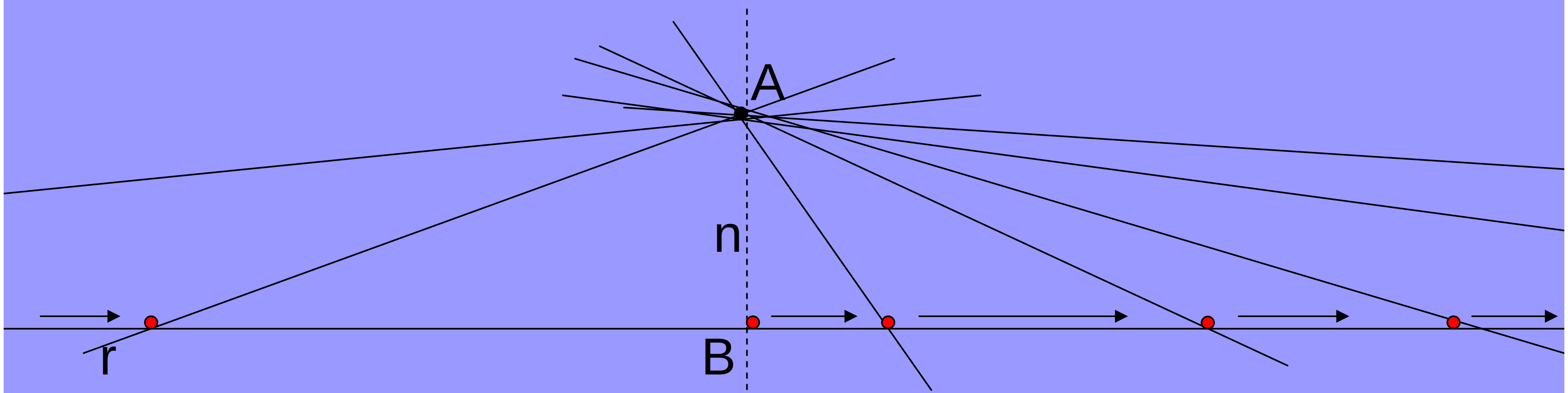
Nikolaj Lobačevskij

Carl Friedrich Gauss

Essi conservarono tutti i postulati della geometria euclidea, tranne il quinto, negando la proposizione B e costruirono una teoria in cui per un punto P esterno ad una retta data passano infinite rette parallele ad essa: due di esse si dicono asintotiche e si avvicinano indefinitamente alla retta data, mentre le altre si dicono parallele divergenti e si allontanano dalla retta data. Questa teoria viene chiamata **geometria iperbolica**. Boylai ebbe a dire di essa <<Ho scoperto un mondo nuovo>>

LA GEOMETRIA IPERBOLICA

In un piano si considerino una retta **r** ed un punto **A** che non appartiene alla retta. Ora si faccia ruotare in uno dei due versi la perpendicolare **n** tracciata da **A** ad **r**. Il punto di intersezione **B** si "allontana" lungo la retta, la quale forma un angolo via via minore con la retta **AB**, finché il punto di intersezione cessa di presentarsi da quella parte e, procedendo ulteriormente, compare dall'altra. Quanto è "grande" l'intervallo in cui la retta *AB* non interseca più la **r** da una parte ma ancora non la interseca dall'altra? Secondo il quinto postulato euclideo questo intervallo si riduce ad un unico elemento: la retta **s** che passa per **A** e che è perpendicolare a **n**. Quello che assumono Lobačevskij e Bolyai è che l'intervallo delle rette che non intersecano **r** non si riduca a questo unico caso. La prima e l'ultima retta che non incontrano **r** sono **parallele asintotiche**, tutte le altre sono **parallele divergenti.**



LA GEOMETRIA ELLITTICA

La geometria iperbolica nega il quinto postulato, ma lascia inalterati tutti gli altri, in particolare il secondo che sottintende che la retta sia aperta e infinita.

La geometria ellittica si discosta ancor di più da quella euclidea perché, oltre a negare il quinto postulato considera le rette linee finite e chiuse, che equivale a negare anche il secondo postulato.

Per la geometria ellittica non esistono rette parallele perché tutte le rette si incontrano, dunque è negato il quinto postulato nella proposizione A.

LA GEOMETRIA SFERICA

Molto simile alla geometria ellittica ha anche essa rette finite e mai parallele,ed inoltre non è sempre verificata la proposizione:

Per due punti passa una e una sola retta.

IL DUBBIO

Ci poniamo una domanda a proposito delle nuove geometrie:

Possiamo essere sicuri che un sistema matematico esista davvero solo per il fatto di scrivere alcuni assiomi e dedurre da questi un certo numero di teoremi?

Attenzione: non ci stiamo chiedendo se il sistema esista nel mondo reale, ma se esista come valida struttura matematica.

Per dare una risposta occorre verificare che il sistema sia coerente, ovvero che tra tutte le deduzioni che si possono trarre dagli assiomi posti non ci sia nessuna contraddizione

Dunque il problema è spostato: per accettare i nuovi sistemi assiomatici dobbiamo accertarne la coerenza.

Per fare ciò costruiamo un modello, cioè un sistema in grado di soddisfare tutti gli assiomi stabiliti.

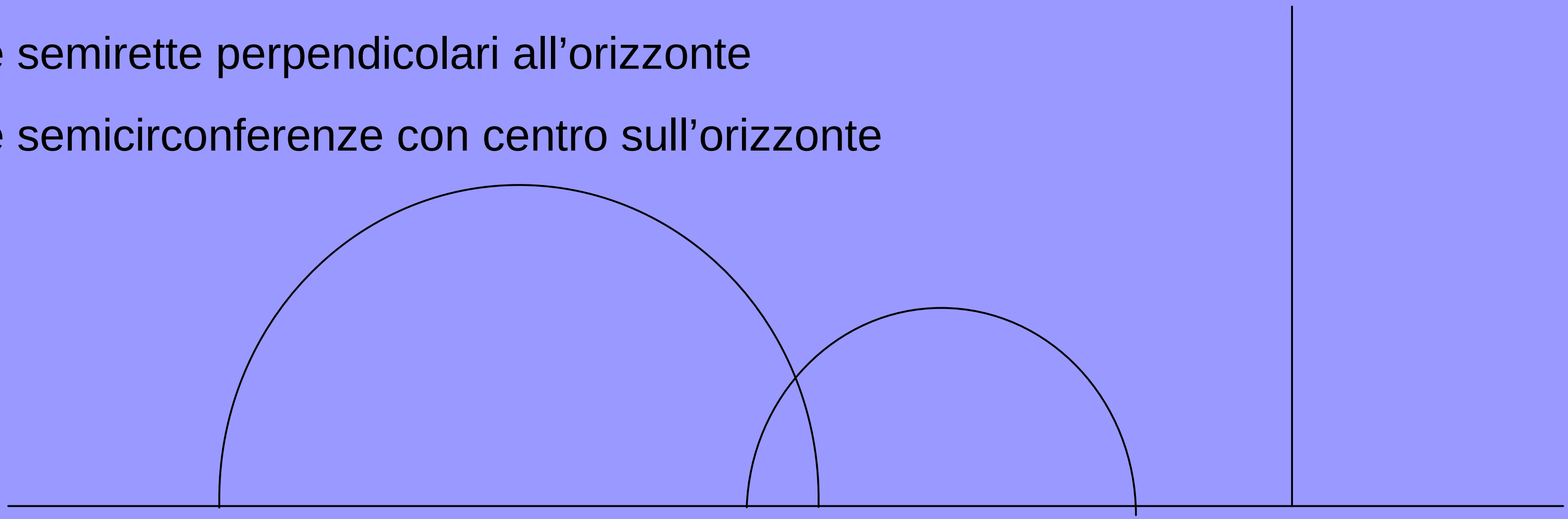
Il modello è costruito considerando dapprima gli enti della geometria euclidea, e poi ribattezzando alcuni di essi e le loro mutue relazioni in modo da generare una geometria non euclidea.

Questa avrà la stessa coerenza interna della geometria euclidea originaria perché si presenta come un complesso di proprietà di questa, osservato da un altro punto di vista e descritto con altre parole.

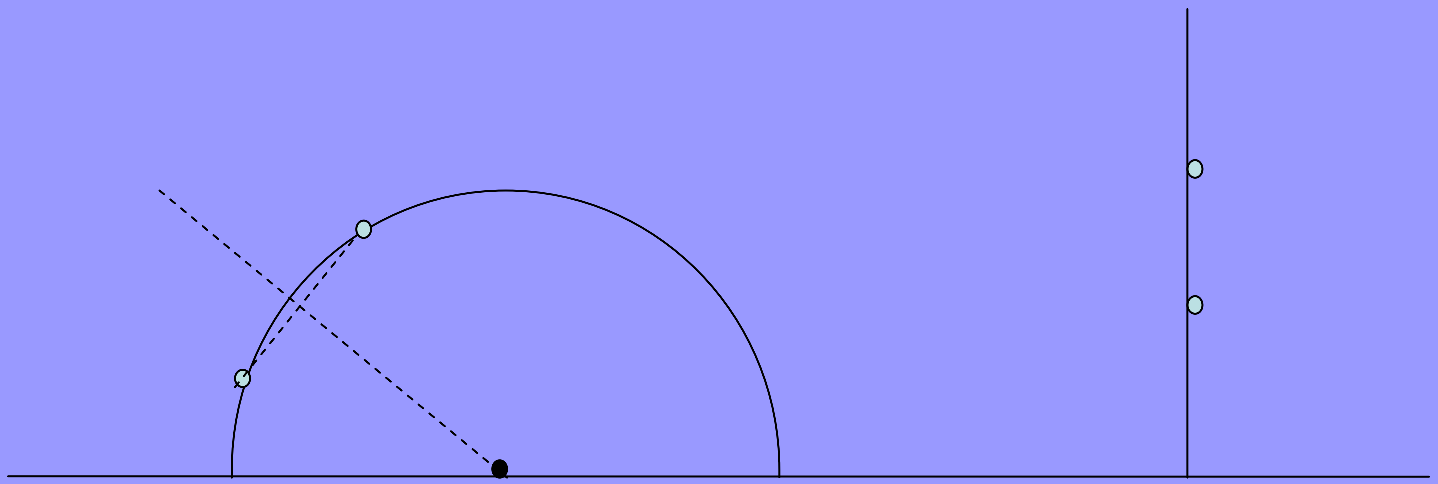
IL MODELLO DI POINCARẾ

Considerato un semipiano delimitato da una retta detta orizzonte chiameremo rette:

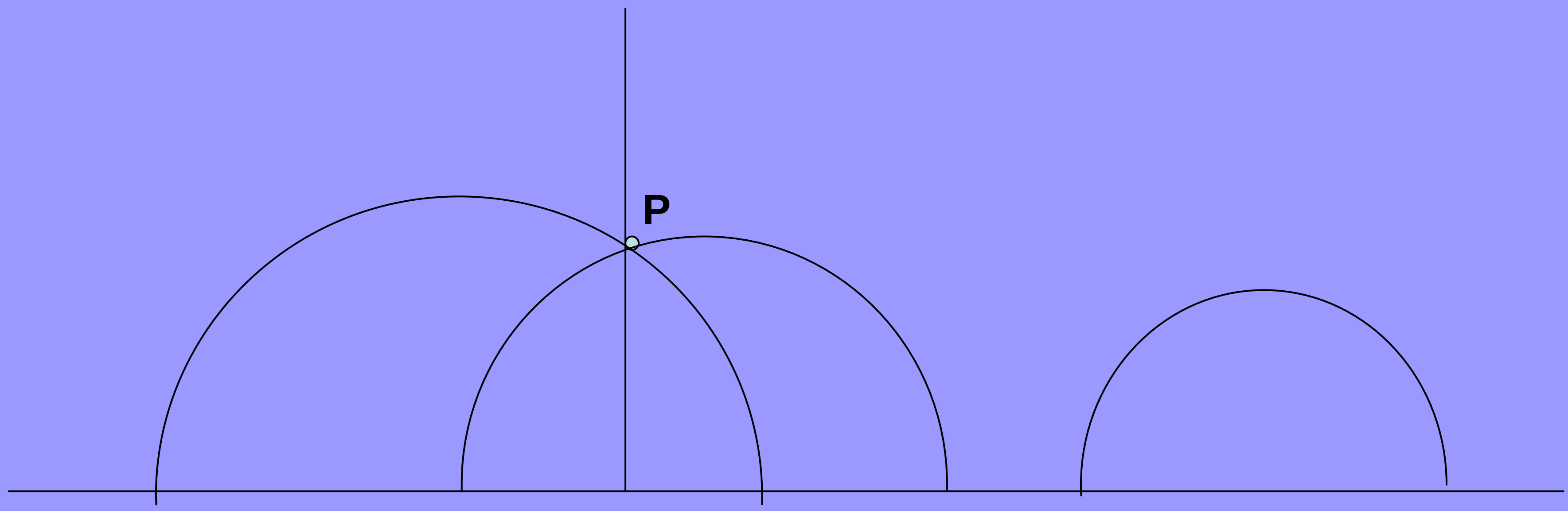
- le semirette perpendicolari all’orizzonte
- le semicirconferenze con centro sull’orizzonte



Si vede subito che per due punti passa una e una sola retta:



Anche gli altri postulati sono verificati in questo modello, ma non il quinto, come si vede in questo esempio



In cui per il punto assegnato abbiamo tracciato tre parallele alla retta data.

LA SFERA DI RIEMANN

Su una superficie curva al concetto di retta si sostituisce quello di **geodetica**: il cammino più breve. Nel caso della superficie sferica il cammino più breve è un arco di circonferenza massima:

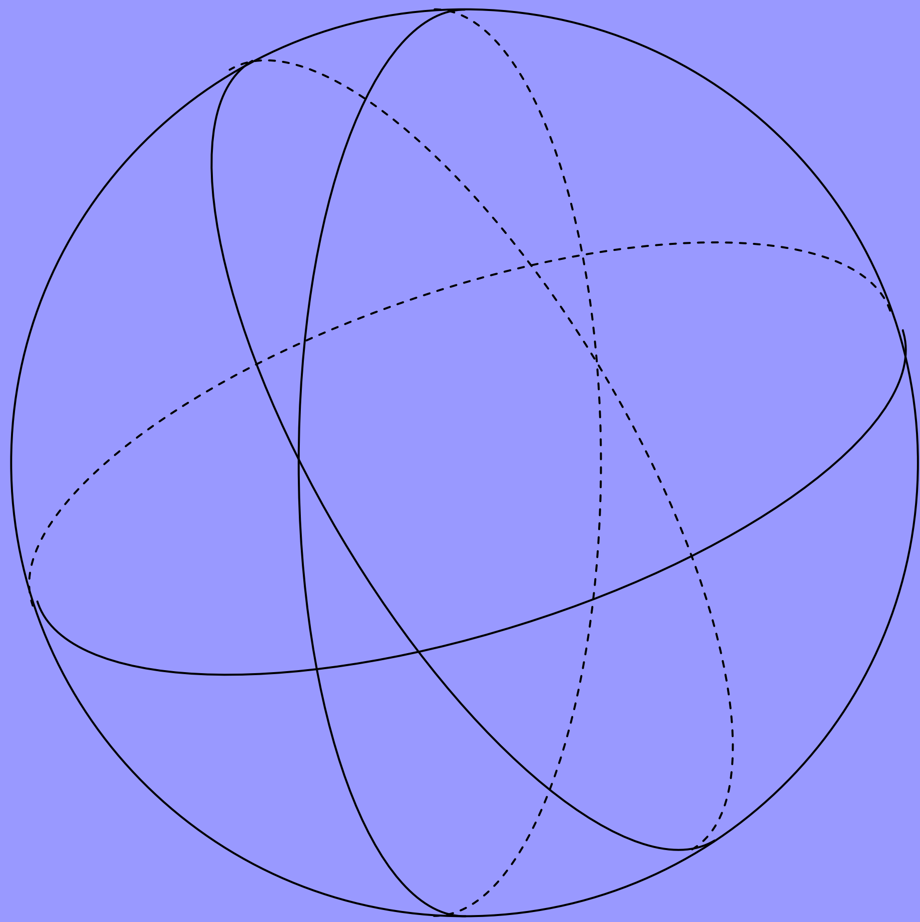
Le rette sono dunque linee chiuse (contro il II postulato) e sono sempre incidenti: non esistono rette parallele (contro il V postulato)

Ma c'è un'altra differenza con la geometria euclidea:

Per due punti

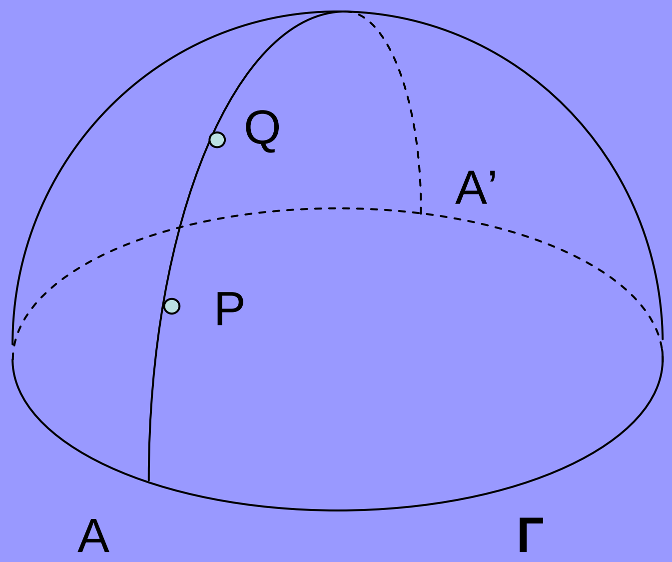
• passa una e una sola retta se essi non sono diametralmente opposti.

• passano infinite rette se essi sono diametralmente opposti.



UN ALTRO MODELLO PER LA GEOMETRIA ELLITTICA

Per conservare l'assioma euclideo secondo cui: «Per due punti distinti passa una ed una sola retta». L'idea è la seguente:
Visto che per due punti di una sfera passa una e un sola circonferenza massima a meno che essi non siano diametralmente opposti, riduciamo la sfera a una semisfera (eliminando così i punti diametralmente opposti a quelli della semisfera). Rimangono allora punti diametralmente opposti solo sulla circonferenza **Γ** che delimita la semisfera.
Imponiamo allora che i punti diametralmente opposti di tale circonferenza coincidano in un unico punto, siano in sostanza "lo stesso punto"



Per due punti passa una sola "retta" (ossia una sola semicirconferenza massima), anche nel caso che uno o entrambi i due punti sia una "coppia" di punti diametralmente opposti della circonferenza **Γ** (e in questo ultimo caso la "retta" è proprio la (semi)circonferenza **Γ**).
Come per la geometria sferica le "rette" sono linee chiuse: se, ad esempio, si percorre la "retta" r da P a Q e si prosegue fino a raggiungere **Γ** in A', ci si trova nel punto diametralmente opposto e si può continuare a percorrere r tornando in P.

GEOMETRIA E REALTA'

L'esperienza non potrà mai decidere se esistono infinite rette o una sola o nessuna passanti per un punto e parallele ad una retta data perché la massima lunghezza di ogni riga reale, di un filo e perfino di un raggio luminoso visibile al telescopio è certamente finita, per quanto grande. Ma potremmo scegliere un'altra strada:

Una notissima conseguenza del quinto postulato di Euclide è che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti.

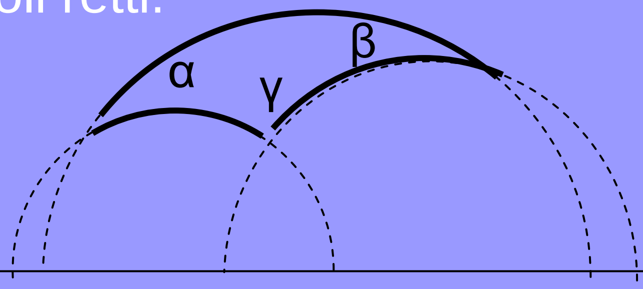
Girolamo Saccheri, nel suo fallito tentativo di dimostrare il V postulato era riuscito invece a dimostrare che, eliminandolo rimanevano tre alternative:

• Se esiste un triangolo in cui la somma degli angoli interni è < di due retti, allora ogni triangolo ha la somma degli angoli interni < di due retti

•Se esiste un triangolo in cui la somma degli angoli interni = a due retti, allora ogni triangolo ha la somma degli angoli interni = a due retti

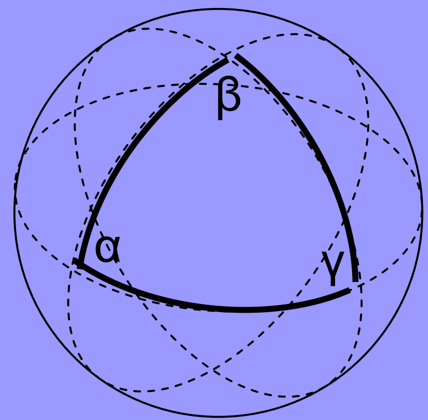
•Se esiste un triangolo in cui la somma degli angoli interni è > di due retti, allora ogni triangolo ha la somma degli angoli interni > di due retti

È chiaro che la seconda alternativa è quella che dà luogo alla geometria euclidea, mentre si può dimostrare che nella geometria iperbolica la somma in questione è < di due angoli retti:



E infine si può dimostrare che nelle geometrie ellittiche essa è > di due retti:

Questo indusse Gauss a cercare di risolvere la questione misurando accuratamente gli angoli formati da tre cime montane, e trovò che la loro somma, **nei limiti degli errori**, era proprio due retti, ma in realtà il suo esperimento non risolse proprio nulla: sarebbe stato attendibile se lo scarto rispetto a due retti fosse stato **superiore** all’errore stimato; ma a questa conclusione non si è mai giunti, neanche con triangoli di dimensioni interstellari e con metodi accuratissimi di misura.



CONSIDERAZIONI FINALI

È inutile cercare di stabilire quale delle geometrie è più aderente alla realtà.

Esse sono costruzioni assiomatiche che non hanno alcuna pretesa di rappresentare il mondo fisico.

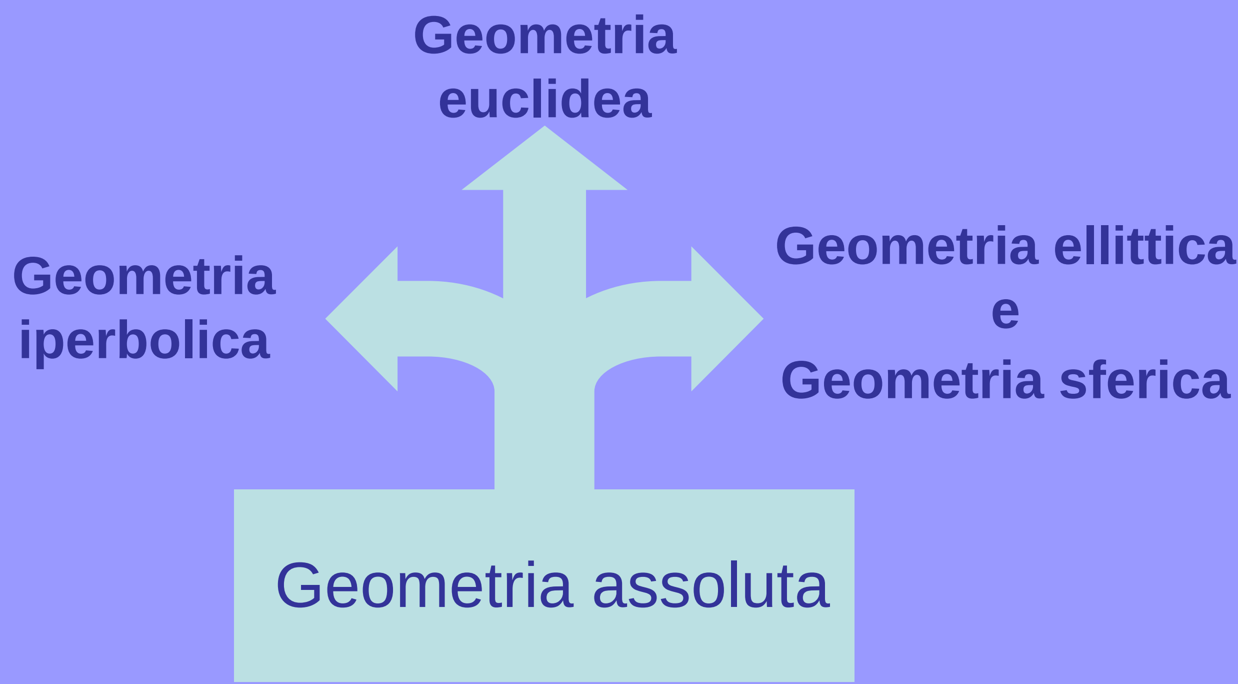
Sono da accettare se sono coerenti, e, sebbene le geometrie non euclidee siano nate da ricerche di natura speculativa, si sono poi sviluppate come scienze autonome e in molti casi, come spesso accade per teorie matematiche apparentemente avulse da ogni riscontro pratico sono risultate un utile strumento nelle applicazioni alle altre scienze.

C'è tuttavia una parte comune ad esse: tutti i teoremi che non fanno ricorso al quinto postulato. Essi sono validi in tutte le geometrie, e costituiscono la **geometria assoluta**.

CONCLUSIONE

Il quinto postulato costituisce un bivio:

- Accettandolo si ha la geometria euclidea
- Negandolo si ottengono le altre geometrie



Nessuna delle alternative è migliore o “più vera” delle altre.

Non c’è una geometria migliore o “più vera” delle altre

Nel suo trattato **La Scienza e l’Ipotesi** lo stesso Poincaré esprime questo concetto:

Se la geometria fosse una scienza sperimentale non sarebbe una scienza esatta e andrebbe soggetta ad una continua revisione

Gli assiomi non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali: sono convenzioni. La nostra scelta tra tutte le convenzioni possibili è guidata da fatti sperimentali; ma essa resta libera ed è limitata solo dalla necessità di evitare ogni contraddizione. In tal modo i postulati possono rimanere rigorosamente veri, anche quando le leggi sperimentali che ne hanno suggerita l’adozione, sono approssimative.

Che si deve quindi pensare della questione circa la verità della geometria? Essa non ha alcun senso. Sarebbe come domandare se il sistema metrico sia vero e false le antiche misure; se siano vere le coordinate cartesiane e false quelle polari. Una geometria non può essere più vera di un’altra; essa può essere soltanto più *comoda*.

Secondo Poincaré la geometria euclidea è la più “comoda” perché:

1- è la più semplice, non solo in rapporto alle nostra abitudini intellettuali, ma è la più semplice in sé, come un polinomio di primo grado è più semplice di uno di secondo grado, e come le formule della trigonometria sferica sono più complicate di quelle della geometria rettilinea, e tali ancora sembrerebbero ad un analista che ne ignorasse il significato geometrico.

2- si accorda assai bene con le proprietà dei solidi naturali di questi corpi che noi tocchiamo e vediamo, e con i quali facciamo i nostri istrumenti di misura.

Queste le parole di Poicaré, ma oggi noi sappiamo che in talune branche della fisica si ritiene più comoda l’adozione della geometria non euclidea

Questa ultima osservazione, lungi dal contraddire il grande Poincaré conferma la grandezza della matematica: scienza speculativa ed astratta, ma al contempo capace di descrivere situazioni concrete.

per questo qualcuno l’ha chiamata

Regina di tutte le scienze – Serva di tutte le scienze

La seconda certezza:

SISTEMI ASSIOMATICI

Se da un lato le geometrie non euclidee ci hanno privato della certezza che credevamo di avere con la geometria euclidea, abbiamo acquisito una certezza nuova, quella dei

SISTEMI FORMALI

Partendo da uno o più assiomi, utilizzando una o più regole possiamo costruire una teoria. Non ci preoccupiamo più di riscontrare la verità dei risultati nel mondo concreto. Ogni proposizione è vera perché è stata correttamente derivata dalle precedenti.

La verità del sistema sta nella sua coerenza, cioè nel fatto che nel sistema non ci sono contraddizioni.

Ma possiamo essere sicuri di questa ultima affermazione?

PRINCIPIA MATHEMATICA

A partire dal 1910 Russel e Whitehead elaborano un'opera monumentale in tre volumi "**Principia Mathematica**" con lo scopo di dedurre la matematica dalla logica assiomatica.

L'ambizione dei due autori era duplice:

- *che tutta la matematica fosse realmente contenuta nei metodi indicati.*
- *che i metodi esposti fossero coerenti tra loro.*

Ma nessuno poteva dare loro questa certezza

Questo problema turbava molto il grande matematico tedesco David Hilbert. Egli, che già nel 1900 in occasione di una solenne assise di matematici aveva elaborato un programma con la lista dei grandi problemi fondamentali su cui impegnarsi, lanciò alla comunità mondiale dei matematici la sfida di dimostrare che il sistema definito nei Principia Mathematica fosse ***completo*** e ***coerente***.

OSSERVAZIONE

È possibile giustificare un metodo di ragionamento in base a quello stesso metodo di ragionamento?

Questo obiettivo occupò la mente di molti tra i più grandi matematici del mondo durante i primi trent'anni del secolo.

Nel 1931 il giovane matematico Kurt Gödel dimostrò che qualsiasi sistema assiomatico o è **coerente ma incompleto**, oppure, **se è completo non può essere coerente**. In altre parole, se richiediamo ai principia Mathematica di dimostrare sempre la verità o la falsità di qualsiasi proposizione, ci troveremo prima o poi di fronte a una contraddizione, se invece imponiamo che non ci siano contraddizioni allora dobbiamo accettare come pedaggio che ci sarà un teorema sul quale non è possibile decidere.

IL GIOCO MU

UN ESEMPIO DI SISTEMA FORMALE

DEFINIZIONE DEL SISTEMA

Esso utilizza tre lettere dell'alfabeto: **M**, **I**, **U**.

È data la *stringa* **MI**.

Tutte le altre stringhe del sistema si possono ottenere da quelle in nostro possesso utilizzando a piacere le seguenti regole:

1. Se si possiede una stringa che termina con una **I**, si può aggiungere una **U** alla fine.
2. Si abbia **M***x*. Allora si può includere **M***xx* nella collezione.
3. Se in una delle stringhe della collezione c'è **III**, si può costruire una nuova stringa mettendo una **U** al posto di **III**.
4. Se all'interno di una delle stringhe della collezione c'è **UU**, si può eliminarlo.

TEOREMI, ASSIOMI REGOLE

In matematica un teorema è un enunciato del linguaggio comune la cui verità è stata dimostrata con una rigorosa argomentazione.

Nei sistemi formali i teoremi non sono necessariamente “enunciati” ma stringhe di simboli, e non sono *dimostrati* ma *prodotti* in base a regole predefinite.

La stringa iniziale, fornita “gratuitamente” si chiama **assioma.**

Le stringhe che si ottengono man mano sono i **teoremi** del sistema formale

Le regole per produrre teoremi si chiamano **regole di inferenza**.

Il gioco **MU** consiste nel produrre, a partire dall’assioma **MI**, mediante le regole di inferenza il teorema **MU**.

Dopo qualche tentativo è facile rendersi conto che è impossibile produrre **MU**, ovvero, usando la nomenclatura stabilita, che **MU** non è un teorema del nostro sistema formale.

SOLUZIONE DEL GIOCO **MU**

Detto **I**-*somma* il numero delle **I** di una stringa, osserviamo che inizialmente la **I**-*somma* è 1, che non è un multiplo di 3.

Le regole I e IV non cambiano la **I**-*somma.*

La regola III cambia la **I**-*somma* diminuendola di 3, quindi la **I**-*somma* del teorema prodotto è multiplo di 3 solo se lo era la **I**-*somma* del teorema da cui deriva.

Lo stesso può dirsi della regola II che raddoppia la **I**-*somma*.

Ne segue che nessun teorema del sistema **MIU** può avere la **I**-*somma* multiplo di 3, e quindi **MU** non è un teorema, perche la sua **I**-*somma* = 0

DENTRO E FUORI DAL SISTEMA

Le quattro regole di inferenza ci permettono di produrre teoremi, ma non è solo in base ad esse che noi abbiamo stabilito che **MU** è un teorema falso; per fare questo siamo usciti dal sistema, e solo osservandolo dal di fuori abbiamo concluso che non si produrrà mai la stringa **MU**.

Abbiamo cioè trovato un modo per decidere se un dato teorema è vero o falso, ma questo modo non è dentro il sistema.

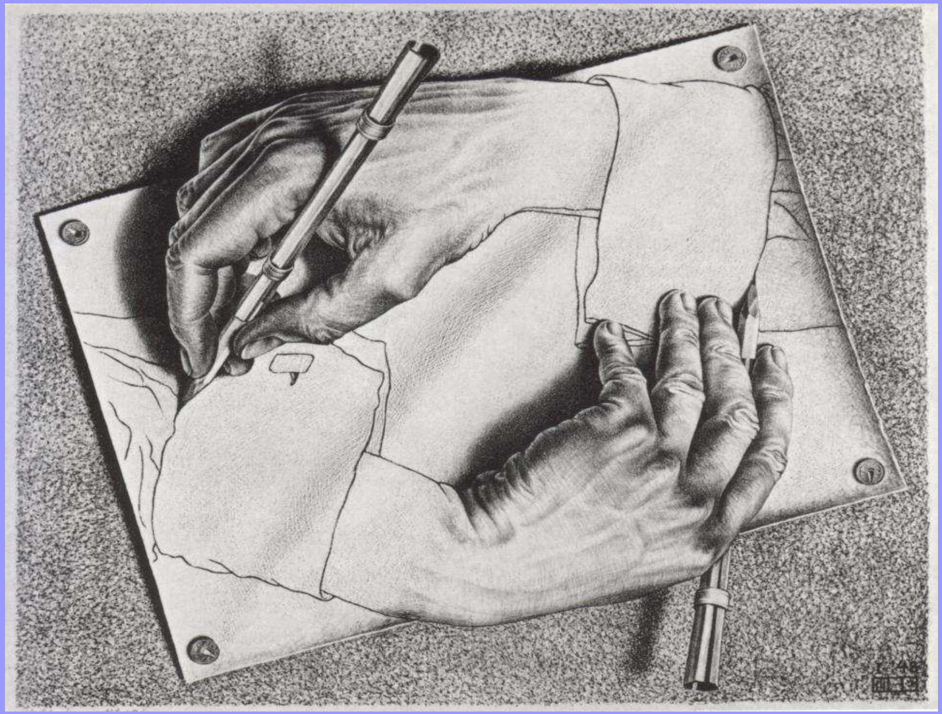
Se rimaniamo nel sistema ci saranno sempre teoremi indecidibili, dei quali cioè non siamo in grado di stabilire se sono veri o falsi.

Il crollo della seconda certezza

IL TEOREMA DI GÖDEL

- Nel 1931 il giovane matematico Kurt Gödel dimostra che qualsiasi sistema assiomatico o è coerente ma incompleto, oppure, se è **completo** non può essere **coerente**.

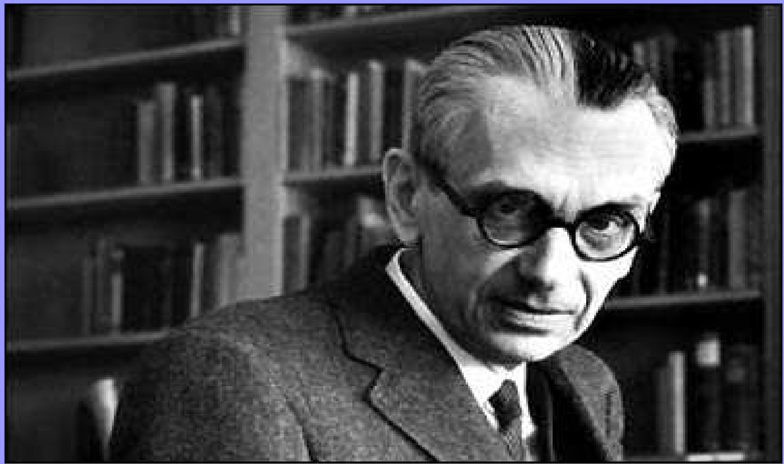
In altre parole, se richiediamo ad una teoria di dimostrare la verità o la falsità di **qualsiasi proposizione**,ci troveremo prima o poi di fronte a una contraddizione, se invece imponiamo che non ci siano contraddizioni allora dobbiamo accettare che ci sarà un teorema sul quale **non è possibile decidere**; e se volessimo aggirare l’ostacolo prendendo l’enunciato di quel teorema come un nuovo assioma, incontreremo più avanti un'altra verità indecidibile.



La scoperta di Gödel, nella sua forma essenziale, comporta la trasposizione in termini matematici dell’antico paradosso del mentitore.

Epimenide, cretese, afferma che tutti I cretesi sono mentitori

Gödel pensò di utilizzare il ragionamento matematico per esplorare il ragionamento matematico stesso.



Kurt Gödel

Da

Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei “Principia Mathematica” e dei sistemi affini

Proposizione VI

Ad ogni classe k di formule che sia ω-coerente e ricorsiva corrispondono *segni-di-classe* ricorsivi *r* tali che né *v* Gen *r* né Neg(*v* Gen *r*) appartengono a Flg (k) (dove *v* è la *variabile libera* di *r*)

Che, espresso in linguaggio più accessibile significa:

Tutte le assiomatizzazioni coerenti contengono proposizioni indecidibili.

NON E’ PIU’ POSSIBILE AFFERMARE CHE

$\boxed{\text{VERO}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{DIMOSTRABILE}}$

LA DIMOSTRABILITA’ E’ UNA NOZIONE PIU’ DEBOLE DELLA VERITA’

E QUESTO QUALUNQUE SIA IL SISTEMA ASSIOMATICO CONSIDERATO

A proposito di questo risultato il matematico tedesco Hermann Weyl ebbe a dire:

Dio esiste dato che la matematica è coerente

Il diavolo esiste dato che non possiamo dimostrarne la coerenza

È necessario tener presente che una dimostrazione è un’argomentazione che si svolge entro un determinato sistema di proposizioni. Nel caso dell’opera di Gödel il sistema è quello dei Principia Mathematica.

La proposizione di Epimenide, di cui una versione più incisiva è

Questo enunciato è falso

Appare un paradosso perché autoreferenziale

La trasposizione matematica del paradosso del mentitore è la seguente:

Questo enunciato dell’aritmetica non ammette alcuna dimostrazione nel sistema dei Principia Mathematica.

Mentre l’enunciato di Epimenide crea un paradosso perché non è né vero né falso, l’enunciato di Gödel è indimostrabile (all’interno dei P.M.) ma vero.

La conclusione è che il sistema dei P.M. è “incompleto”: vi sono enunciati veri dell’aritmetica che il sistema è troppo debole per dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

Antonio Zichichi	L'infinito – L'avventura di un'idea straordinaria	Pratiche editrice
Enrico Giusti	Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici	Bollati Boringhieri
R. Courant H. Robbin	Che cos'è la matematica?	Bollati Boringhieri
Morris Kline	Storia del pensiero matematico	Einaudi
D. R. Hofstadter	Gödel, Escher, Bach: un'eterna Ghirlanda Brillante	Adelphi
Enrico Poincaré	La sccienza e l'ipotesi estratti	La Nuova Italia