Divagazioni sul "facile" e il "difficile" in geometria

La geometria è difficile, dicono parecchi studenti. Siccome spetta loro studiarla, bisogna crederli. Queste difficoltà sono di carattere diverso: alcune sono sopprimibili o riducibili, altre sono invece insopprimibili perchè dipendenti dalla natura dei concetti che intervengono necessariamente nella geometria.

Di sfuggita, poniamo in rilievo che spesso la rapida ed esatta comprensione di un dato argomento di geometria è ostacolata dal fatto che si adoperano sostantivi e verbi che hanno anche un significato generico nel linguaggio comune, significato che prevale inconsapevolmente sopra quello più strettamente delimitato ad essi attribuito, in geometria, che offusca quindi la chiarezza dell'esposizione e rende meno facile allo studente di afferrare l'idea e di comprenderla. « *Tiriamo* una retta.... », « *conduciamo* un piano.... », « la retta *incontra* un piano.... » e tante altre frasi comunemente usate possono suscitare più o meno avvertitamente delle incertezze o nebulosità circa il significato con cui sono adoperate se nella mente di chi ascolta si hanno inconsciamente presenti le frasi: « *tiriamo* una fune.... », « *conduciamo* l'asino alla stalla.... », « Carlo *incontra* Luigi.... » e così via. Ma anche se il linguaggio è più controllato e più rigoroso, il significato, « geometrico » di certi verbi, come « essere », « essere dato », « stare », « appartenere », « giacere », « congiungere », non acquista subito nella mente giovanile la scarnificata chiarezza che essi hanno nel linguaggio geometrico.

Altre e più serie difficoltà, comprese nella categoria delle difficoltà insopprimibili, sono quelle derivanti dalla natura « infinitesimale » dei concetti fondamentali della geometria. Le definizioni di Euclide: « *punto* è ciò che non ha parti », « *linea* è una lunghezza senza larghezza », « *linea retta* è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti », « *angolo piano* è l'inclinazione reciproca di due linee » ecc., non definiscono nulla. Noi moderni ci sbrighiamo alla svelta dicendo che questi concetti sono.... « primitivi ». « Il piano si immagina *illimitato* in tutte le *direzioni* », « la retta si immagina illimitata nei suoi due *versi* », « fra due punti A e B di una retta vi sono infiniti punti » ecc. Dentro questi concetti sono racchiusi tanta complessità e tanto mistero che soltanto formalmente li sopprimiamo con quella attribuzione di « primitività ». C'è dentro essi tutto il travaglio che la storia della scienza denuncia nel passaggio dalla *monade* dei filosofi greci al punto astratto della geometria, nello sforzo di dominare l'« infinitesimo » e l'« infinito », che nella matematica, nella fisica, nell'astronomia e anche nella filosofia, impongono la loro presenza. Del resto, in aritmetica l'« infinito » compare subito appena si comincia a scrivere la successione dei numeri interi (vedi il « più uno » di Zavattini nei « Libri vecchi e nuovi » di questo fascicolo). « Infinitesimo » e « infinito » sono parole che nella scuola media non si pronunziano: esse suscitano un certo timore che faceva dire a un matematico « non scherziamo con l'infinito »; ma anche con l'« infinitesimo » non si può scherzare.... e non per nulla la bomba « atomica », figlia della fisica particellare, fa tremare. Noi però vorremo cautamente accostare voi giovani, a tali prodigiosi concetti per i quali un altro matematico poteva affermare: « sopprimete l'‘infinito’ e la civiltà retrocederà di venti secoli ».

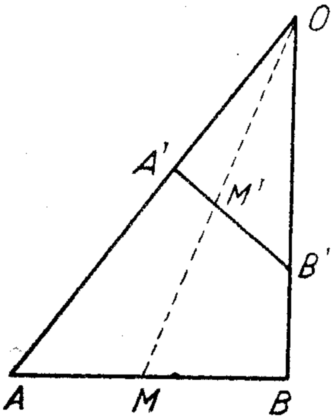

Fig. 1.

La figura qui a lato « accoppia » il punto M del segmento AB col punto M' del segmento $A'B'$ con un criterio di immediata evidenza: scaturisce qui il fondamentale concetto geometrico di « corrispondenza ». Galileo, nel 1636, col suo stile antiquato ma immaginoso, diceva che « la linea più lunga non contiene più punti di quella più corta ». Ed aveva ragione: ma come mettere d'accordo ciò col fatto che i due segmenti sono diseguali bandendo l'infinito e l'infinitesimo? Non evitiamoli dunque.

Non c'è studente che non riesca a trovare agevolmente che la somma delle circonferenze che hanno per diametri le parti in cui è successivamente diviso il diametro AB è eguale alla circonferenza di diametro AB. Giocando sull'incertezza implicita nei grossolani concetti di linea e di punto, questa figura consente di affermare il.... « paradosso »: « la circonferenza e un suo diametro sono eguali ». Basta ragionare (male, s'intende) così: aumentando il numero delle parti in cui si divide il segmento AB, le sempre più piccole circonferenze divengono i punti del diametro e il loro insieme è il diametro. È superfluo osservare che quei cerchietti che divengono ogni volta più piccoli rimangono sempre circonferenze e non possono mai diventare.... punti. S'impone dunque un « passaggio al limite » che può essere compiuto in modo esatto o errato; si tratta di un'operazione che ha indotto in errore spesso anche grandi costruttori dell'analisi infinitesimale, ma se vorrete essere uomini veramente moderni dovrete prendere dimestichezza con essa. E perciò di tanto in tanto ne discorreremo.

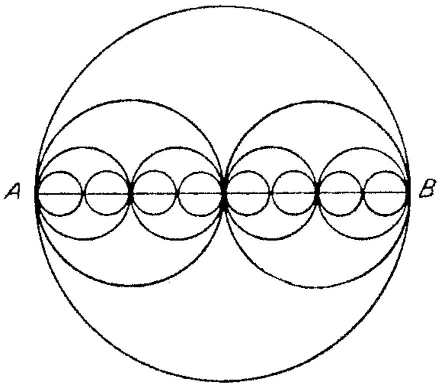

Fig. 2.

Altra parola.... pericolosa è questa: parallele. « Due rette AB e CD del piano (vedi fig. 3) che non si incontrano si dicono parallele ». Con quel « non », anche questa volta ci sbrighiamo presto, ma come faremo mai ad accertare che due rette « non si incontrano »? Finchè si parla di segmenti, si rimane in un campo « finito » e si può facilmente accertare se due di essi si incontrano o no, ma per due rette (esse sono illimitate) come fare? Se si incontrano, è presto detto: non sono parallele. Ma se noi percorriamo le due rette (il linguaggio è necessariamente grossolano) e per quanto si cammini non troviamo che si ncontrino, come possiamo escludere che l'« incontro » avvenga più lontano? Lo studente sa che esiste un procedimento geometrico che consente di determinare il « parallelismo » delle due rette lavorando sul piano limitato del foglio su cui sono disegnate: tracciamo la retta EF che incontri le due rette e confrontiamo, ad esempio, due angoli alterni interni: se sono eguali, le rette sono parallele. Però questo teorema si dimostra con un ragionamento per assurdo. Le dimostrazioni per assurdo, per alcuni studenti, non soddisfano sempre e sotto certi aspetti essi non hanno tutti i torti. È opportuno dir loro

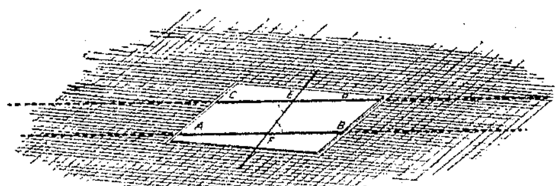

Fig. 3.

che a quel ragionamento per assurdo si ricorre per evitare.... lo scoglio dell'« infinito » e ciò accade di solito, ad esempio, nella rettificazione della circonferenza, nella cubatura delle piramidi ecc. e cioè in quei procedimenti che da Eudosso, l'« imbrigliatore dell'infinito » presero il nome di procedimenti di « esaustione ».

Se nel piano si ha la retta AB e un punto E esterno ad essa, costruendo l'angolo CEF eguale ad EFB siamo certi che la retta CD è parallela ad AB. Una retta parallela ad AB passa per E. Ne passa una sola? Per quanto strano sembri allo studente che inizi questo studio, non si riesce a dimostrare che ne passa una sola. È questa una verità che si accetta o non si accetta. Qui stanno accanto i due processi fondamentali del pensiero matematico e non soltanto matematico: « intuizione » e « logica ». L'« intuizione » ci fa dire subito: ne passa una sola e continuando a fare della geometria dopo aver « ammessa » questa verità abbiamo la geometria euclidea di cui il prof. Frajese vi ha parlato nelle prime pagine di questo fascicolo. La logica invece ci lascia liberi e possiamo accettare altre ipotesi (scherzando, si potrebbe dire che bisogna chiudere gli occhi per non vedere la figura): non ne passa nessuna, oppure ne passano due o infinite. Nascono altre geometrie delle quali qualcosa, non vi sgomentate, vorremo a suo tempo dirvi.

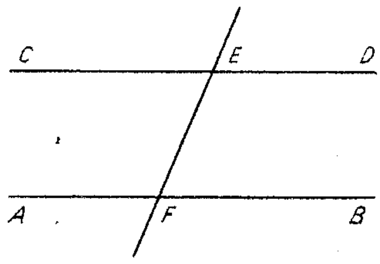

Fig. 4.

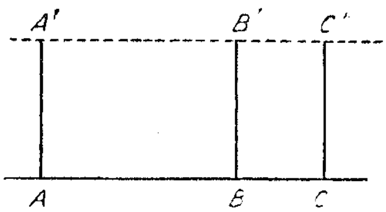

Fig. 5.

Tutti i punti A', B', C'.... che si trovano alla stessa distanza dalla retta r e nello stesso semipiano dei due determinati da r, dove si trovano? L'« intuizione » risponde subito: sopra una retta parallela ad r. Ma possiamo anche dimostrarlo, se abbiamo già ammessa l'unicità della parallela passante da un punto esterno ad una retta, oppure se non vogliamo ammettere tale unicità, possiamo prendere l'affermazione che i punti A', B', C' si trovano su una parallela ad r come intuitiva, e il cosiddetto postulato di Euclide assumerebbe questa nuova forma.

Se i punti A', B' e C' sono rispettivamente ad egual distanza dai punti A, B e C di una circonferenza sopra quale linea si trovano? Sopra una circonferenza concentrica, la quale si dice parallela alla data. Si può notare che, mentre di due rette parallele una può essere portata sopra l'altra mediante una « traslazione », la stessa cosa non può avvenire fra queste due circonferenze, le quali non si sovrappongono perchè sono diseguali: si dice anche, per accennare ad un'altra parola che fa parte della comune cultura scientifica, che le due circonferenze hanno diversa « curvatura ».

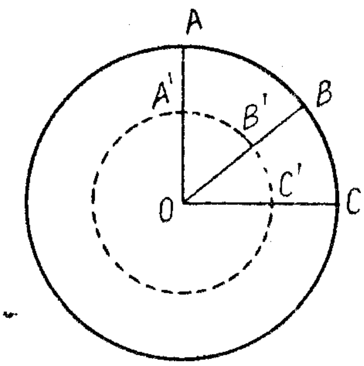

Fig. 6.

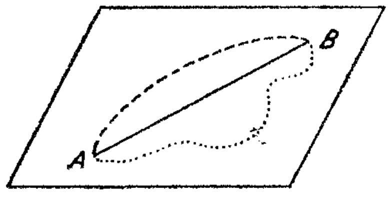

Fig. 7.

Delle linee che congiungono due punti A e B del piano, il segmento AB è la minore. Verità intuitiva che contiene in sè il segreto del « piano » considerato

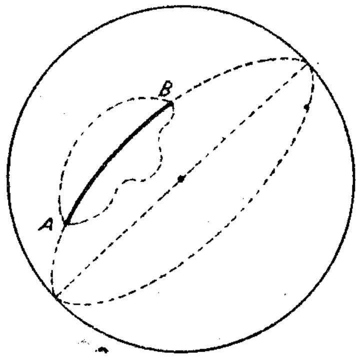

Fig 8.

come superficie. E delle linee sopra una superficie sferica, che congiungono i due punti A e B, quale è la minore? È il minore dei due archi di cerchio massimo passante per i due punti: se la terra fosse esattamente sferica, un piroscafo che voglia andar, ad esempio, da Napoli a Genova percorrendo il minor cammino, deve seguire l'arco di cerchio massimo che passa per Genova e per Napoli. Queste linee si chiamano « geodetiche »: la retta è la geodetica del piano, l'arco di cerchio massimo è la geodetica della sfera.

Nel piano esistono rette parallele, cioè due geodetiche parallele. Ed esistono geodetiche parallele sulla sfera? Prendiamo sull'equatore un arco AB di un metro e ai suoi estremi conduciamo le due geodetiche perpendicolari AC e BD pure eguali ad un metro (per angolo di due geodetiche in un punto s'intende l'angolo delle due tangenti in quel punto). Sono AC e BD parallele? No, perchè i due cerchi massimi a cui appartengono passano per i poli. Dunque sulla sfera non esistono parallele: preso il cerchio massimo OBO', dal punto A non passa nessuna parallalela a detto cerchio massimo. L'intuizione ci fa affermare che nel piano, dato un punto fuori di una retta, dal punto passa una sola parallela alla retta data e sempre l'intuizione ci fa escludere che non ne passa alcuna. Invece sulla sfera non ne passa alcuna. La geometria della sfera è una geometria non euclidea.

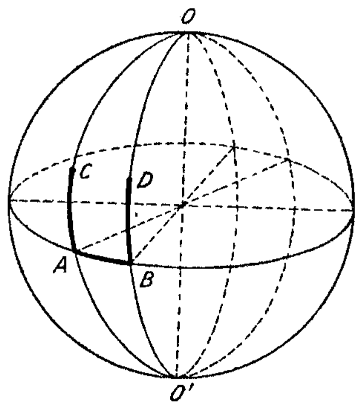

Fig. 9.

* * *

Chiedo agli studenti che ci hanno seguito fin qui: sono difficili queste considerazioni? Non sono attraenti? Val la pena di continuare?

(Da Roberto Giannarelli - Ottobre 1951 -
"La Scienza per i Giovani" – Le Monnier)

▼ ▼ ▲ ▼

Per calcolare il prodotto $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}$, *potrebbero venire in mente due differenti vie*:

I) $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1;$

II) $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$

Quali delle due vie è sbagliata? e perchè?